Б. П. 吉米多维奇

数学分析

习题全解 6

原题译自俄文第13版

最新校对修订本

[illegible]

[illegible]

重积分和曲线积分

A·P·G

安徽人民出版社

经典名著最新版本

全书增补数百新题

题型最全题量最大

数学名家详细解析

ISBN 978-7-212-02700-1

9 787212 027001 >

定价：20.00 元

П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题全解

(六)

南京大学数学系
许　宁　廖良文　编著
杨立信　译

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解.6/(苏)吉米多维奇著.许宁,廖良文编著.一合肥:安徽人民出版社,2005

ISBN 978-7-212-02700-1

Ⅰ.吉… Ⅱ.①吉…②许…③廖… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题Ⅳ.017-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第113595号

吉米多维奇数学分析习题全解(六)

(苏)吉米多维奇 著 许 宁 廖良文 编著 杨立信 译

责任编辑	王玉法 **封面设计** 王国亮
出版发行	安徽人民出版社
地　　址	合肥市政务文化新区圣泉路1118号出版传媒广场 邮编:230071
发 行 部	0551-3533258　0551-3533292(传真)
经　　销	新华书店
印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	880×1230 1/32 **印张** 14.25 **字数** 340千
版　　次	2010年1月第3版(最新校订本)
标准书号	ISBN978-7-212-02700-1
定　　价	20.00元

前　言

数学分析是大学数学系的一门重要必修课，是学习其它数学课的基础。同时，也是理工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作，它在中国有很大影响，早在上世纪五十年代，国内就出版了该书的中译本。安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》，以俄文第 13 版（最新版本）为基础，新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题，共计有五千道习题，数量多，内容丰富，包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大，初学者不易解答。为了给广大高校师生提供学习参考，应安徽人民出版社的同志邀请，我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知，学习数学，做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力，逻辑推理能力，综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答，许宁编写了第六、七章习题的解答。本书的编写过程中，我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解，在许多方面得到了启发，谨对原书的作者表示感谢，在此，不再一一列出。

本书自出版以来受到广大高校师生的高度肯定，深受读者喜爱，畅销不衰。此次再版，我们纠正了前一版中存在的个别错误，对版面进行了适当调整。在此对为此书付出辛勤劳动的各位老师表示深切的谢意！

由于我们水平有限，错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编　者

目　录

第八章　多重积分和曲线积分

§1. 二重积分

1. **二重积分的直接计算法**　下数称为由连续函数 $f(x,y)$ 有界封闭二维域 Ω 上的二重积分：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_j = y_{j+1} - y_j$，而其和是对于使 $(x_i,y_j) \in \Omega$ 的所有 i 和 j 来求的.

若用不等式表示域 Ω：

$$a \leqslant x \leqslant b, y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为 $[a,b]$ 区间的连续函数，则相应的二重积分可以按照下式计算：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

2. **二重积分中的变量代换**　若可微分的连续函数

$$x = x(u,v), y = y(u,v).$$

把 Oxy 平面上有界封闭域 Ω 单值唯一地映为 Ouv 平面上域 Ω'，以及雅哥比行列式：

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

可能除了零测度集之外，在域 Ω 内保持符号不变，则下式是正确的：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega'} f(x(u,v),y(u,v))\,|\,I\,|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

特别是对于按照公式 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ 变换极坐标 r 和 φ 的情

况,得出:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

【3901】 计算积分 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

把它看作是积分和的极限,用直线:

$$x=\frac{i}{n}, y=\frac{j}{n} \qquad (i,j=1,2,\cdots,n-1),$$

把积分域分成若干正方形,并在这些正方形的右顶点选取被积函数值.

解 用

$$x=\frac{i}{n}, y=\frac{j}{n} \qquad (i,j=1,2,\cdots,n-1),$$

将积分域分成若干正方形,则

$$\Delta x=\Delta y=\frac{1}{n},$$

故积分和为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\frac{1}{n^2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4},$$

所以 $$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}=\frac{1}{4}.$$

【3902】 用直线

$$x=1+\frac{i}{n}, y=1+\frac{2j}{n}(i,j=0,1,\cdots,n),$$

把 $1\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 3$, 域分成若干矩形,写出此域内函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 的积分上和 $\overline{S}$ 与积分下和 $\underline{S}$. 当 $n\to\infty$ 时,上和与下和的极限等于什么?

解 上和为

$$\overline{S}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \frac{2n}{n^2}\left[n + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + n + \frac{4}{n}\sum_{j=1}^{n} j + \frac{4}{n}\sum_{j=1}^{n} j^2\right]$$

$$= \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2},$$

其中 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

下和为 $\displaystyle \underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$

$$= \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S} = \lim_{n\to\infty}\underline{S} = \frac{40}{3}.$$

【3903. 用一系列内接正方形作为积分域的近似域，且正方形的顶点 A_{ij} 位于整数点上，并且在每个正方形离坐标原点最远的顶点上选取被积函数值，近似的计算积分：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

将所得出的结果与积分精确值进行比较.

解 由题意知，应取的正方形顶点为(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3). 故利用对称性知

$$\frac{1}{4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{2}{\sqrt{34}} + \frac{2}{\sqrt{41}} + \frac{1}{\sqrt{32}} + \frac{2}{\sqrt{37}} + \frac{2}{\sqrt{44}}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{42}} + \frac{2}{\sqrt{49}} \approx 2.469.$$

即 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}} \approx 9.876.$$

下面来计算积分的精确值，利用极坐标来计算.

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{24+r^2}}$$

$$=2\pi(7-\sqrt{24})\approx 13.194.$$

将精确值与近似值作比较，显然，误差很大，其原因在于有不少不是正方形的域被忽略，因而产生较大的绝对误 3.318 及较大的相对误差$\frac{3.318}{13.194}\approx 25\%$.

【3904】 S 是由直线 $x=0$，$y=0$ 和 $x+y=1$ 围成的三角形，用直线 $x=$ 常数，$y=$ 常数，$x+y=$ 常数把域 S 分成四个相等的三角形，且在这些三角形的重心选取被积函数值. 近似地计算积分$\iint\limits_S\sqrt{x+y}dS$.

解 以 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 及 $x+y=\frac{1}{2}$ 分域 S 即得四个相等的三角形，它的面积均为

$$\Delta S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

重心为$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)$及$\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)$，于是，此积分的近似值为

$$\iint\limits_S\sqrt{x+y}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+2\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}\right)$$

$$\approx\frac{1}{8}(0.577+0.816+2.091)\approx 0.402.$$

【3905】 把 $S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ 域分成有穷个直径小于 δ 的可求积的子域 ΔS_i $(i=1,2,\cdots,n)$.

当 δ 为什么样的值时将保证以下不等式成立：

$$\left|\iint\limits_S\sin(x+y)\mathrm{d}S-\sum_{i=1}^n\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001,$$

其中 $(x_i,y_i)\in\Delta S_i$.

解 记函数 $\sin(x+y)$ 在 ΔS_i 中的振幅为 ω_i，则

$$\left|\iint\limits_S \sin(x+y)\mathrm{d}S-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\Delta S_i}[\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)]\mathrm{d}S\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\Delta S_i}|\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)|\mathrm{d}S$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\Delta S_i}\omega_i\mathrm{d}S=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta S_i.$$

因域$S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$的面积为π，故只要$\omega_i<\dfrac{0.001}{\pi}$即可，而

$$\omega_i=\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}|\sin(x'_i+y'_i)-\sin(x_i+y_i)|$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}|(x'_i+y'_i)-(x_i+y_i)|$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}[|x'_i-x_i|+|y'_i-y_i|]$$

$$\leqslant 2\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}\sqrt{(x'_i-x_i)^2+(y'_i-y_i)^2}=2\delta_i,$$

故只要取

$$\delta<\frac{1}{2\pi}\times 0.001\approx 1.6\times 10^{-4}.$$

则有 $$\left|\iint\limits_S(\sin(x+y))\mathrm{d}S-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001.$$

计算积分(3906—3908)。

【3906—3908】 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x+y)\mathrm{d}y.$

解 $$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x+y)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x^2+x)\Big|_0^1=1.$$

【3907】 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}xy^2\mathrm{d}y.$

解 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2 dy = \int_0^1 \frac{1}{3}xy^3\Big|_{x^2}^{x} dx$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3}\right)dx = \frac{1}{40}.$$

【3908】 $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr$.

解 $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi$

$$= \frac{a^3}{3}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{3}.$$

【3909】 若R为矩形:$a\leqslant x\leqslant A, b\leqslant y\leqslant B$,并且函数$X(x)$和$Y(y)$在相应区间是连续的,证明不等式:

$$\iint_R X(x)Y(y)dxdy = \int_a^A X(x)dx\int_b^B Y(y)dy.$$

证 将二重积分化为二次积分即得

$$\iint_R X(x)Y(y)dxdy$$

$$= \int_0^A dx\int_0^B X(x)Y(y)dy = \int_0^A X(x)dx\int_0^B Y(y)dy.$$

【3910】 若 $f(x,y) = F''_{xy}(x,y)$,计算

$$I = \int_a^A dx\int_b^B f(x,y)dy.$$

解 $I = \int_a^A dx\int_b^B f(x,y)dy = \int_a^A F'_x(x,y)\Big|_b^B dx$

$$= \int_a^A [F'_x(x,B) - F'_x(x,b)]dx$$

$$= F(x,B)\Big|_a^A - F(x,b)\Big|_b^A$$

$$= F(A,B) - F(a,B) - F(A,b) + F(a,b).$$

【3911】 设 $f(x)$ 为在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 的连续函数,证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

其中当且仅当 $f(x)=$ 常数时等号才成立.

提示:研究积分

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y.$$

证 因为

$$0\leqslant\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y.$$

$$=(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

$$+(b-a)\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y,$$

所以 $$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

当 $f(x)$ 为常数时,显然上式中等号成立.反之,设上式中等号成立,则 $$0=\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y$$

$$=\iint_S [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I,$$

其中 $$S=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\},$$

$$F(x,y)=[f(x)-f(y)]^2,$$

为 S 中的非负连续函数,若存在 $(x_0,y_0)\in S$ 使得 $F(x_0,y_0)>0$,则存在一个包含 (x_0,y_0) 的小区域 (ΔS),使得当 $(x,y)\in(\Delta S)$ 时

$$F(x,y)>\frac{F(x_0,y_0)}{2},$$

从而 $$I\geqslant\iint_{(\Delta S)} F(x,y)>\frac{F(x_0,y_0)}{2}\Delta S>0,$$

矛盾.因此,在 S 上,$F(x,y)\equiv 0$,即 $f(x)=$ 常数.

【3912】 下列积分具有怎样的符号:

(1) $\displaystyle\iint_{|x|+|y|\leqslant 1} \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(3) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$?

解 (1) 因为

$$0\leqslant x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2\leqslant 1,$$

所以当 $|x|+|y|<1$ 时,

$$\ln(x^2+y^2)<\ln 1=0.$$

故 $$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x<0.$$

(2) 显然有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1-I_2-I_3.$$

其中 $$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_2=\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2} \sqrt{x^2+y^2-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_3=\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt{x^2-y^2-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时,

$$0\leqslant\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\leqslant 1.$$

故 $$0<I_1<\pi,$$

同样 $$I_2>0,$$

$$I_3>\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi-2\pi=2\pi,$$

因此 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0.$$

(3) $$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 0}} \arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由对称性知，上式第一个积分为零，在第二积分中，被积函数在积分域中为非负且不恒为零的连续函数，因而积分值是正的.因此，原积分是正的.

【3913】 在正方形

$$0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi.$$

求函数 $f(x,y)=\sin^2x\sin^2y$ 的平均值.

解 平均值为

$$I=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}\sin^2x\cdot\sin^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_0^{\pi}\sin^2x\mathrm{d}x\right]^2$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin2x\right)\Big|_0^{\pi}\right]^2=\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

【3914】 利用中值定理估计积分：

$$I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant10}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2x+\cos^2y}.$$

解 因为积分域的面积为 200，故由积分中值定理有

$$I=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta},$$

其中 (ξ,η) 是域 $|x|+|y|\leqslant10$ 中的一个固定点，显然

$$0\leqslant\cos^2\xi+\cos^2\eta\leqslant2$$

下面证明

$$0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2,$$

事实上 $\dfrac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}$ 为有界闭区域 $|x|+|y|\leqslant0$ 上的连续函数，且

$$\frac{1}{102}\leqslant\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}\leqslant\frac{1}{100}.$$

如果

$$\cos^2\xi+\cos^2\eta=2,$$

则
$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant10}\left(\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}-\frac{1}{102}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I-I=0.$$

而 $$f(x,y)=\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}-\frac{1}{102},$$

是非负的连续函数,从而

$$f(x,y)\equiv 0 \qquad (|x|+|y|\leqslant 0),$$

即 $$\cos^2 x+\cos^2 y\equiv 2 \qquad (|x|+|y|\leqslant 10),$$

这显然是不可能的. 故

$$\cos^2\xi+\cos^2\eta<2,$$

同样 $$\cos^2\xi+\cos^2\eta>0.$$

从而有 $$\frac{200}{102}<I<\frac{200}{100},$$

即 $$1.96<I<2.$$

【3915】 求圆

$$(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2.$$

上的点到坐标原点的距离的平方的平均值.

解 平均值为

$$I=\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{\pi R^2}\int_{b-R}^{b+R}\mathrm{d}y\int_{a-\sqrt{R^2-(y-b)^2}}^{a+\sqrt{R^2-(y-b)^2}}x^2\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{3\pi R^2}\int_{b-R}^{b+R}\left[(a+\sqrt{R^2-(y-b)^2})^3\right.\\
&\qquad\left.-(a-\sqrt{R^2-(y-b)^2})^3\right]\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{3\pi R^2}\left[6a^2\int_{b-R}^{b+R}\sqrt{R^2-(y-b)^2}\,\mathrm{d}y\right.\\
&\qquad\left.+2\int_{b-R}^{b+R}[R^2-(y-b)^2]^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y\right]\\
&=\frac{2a^2}{\pi R^2}\left[\frac{y-b}{2}\sqrt{R^2-(y-b)^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{y-b}{R}\right]\Bigg|_{b-R}^{b+R}
\end{aligned}$$

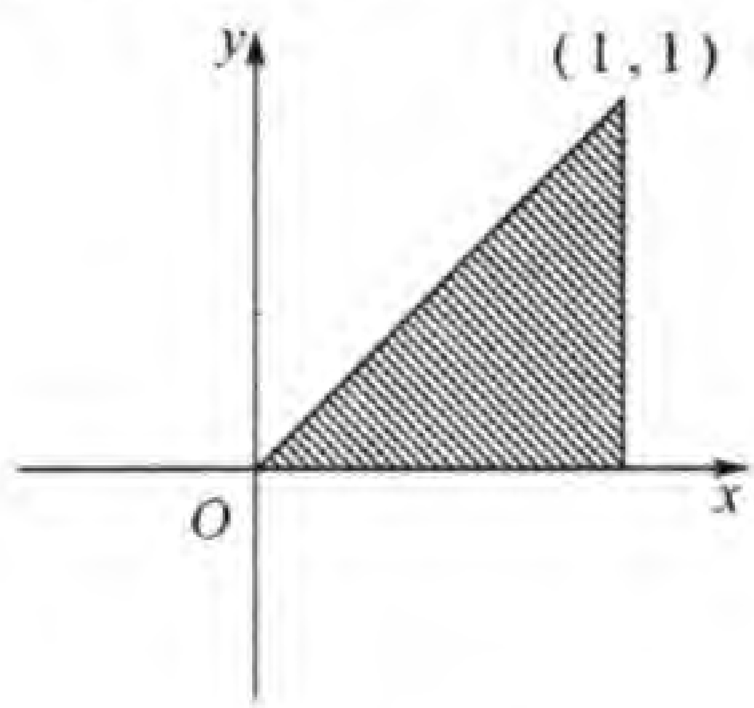
$$+\frac{2}{3\pi R^2}\left\{\frac{y-b}{8}[5R^2-2(y-b)^2]\sqrt{R^2-(y-b)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{3R^4}{8}\arcsin\frac{y-b}{R}\right\}\Bigg|_{b-R}^{b+R}$$
$$=\frac{2a^2}{\pi R^2}\cdot\frac{R^2}{2}\pi+\frac{2}{3\pi R^2}\cdot\frac{3R^4}{8}\pi$$
$$=a^2+\frac{R^2}{4}.$$

同理有 $\displaystyle\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2} y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=b^2+\frac{R^2}{4}$,

于是 $I=a^2+b^2+\dfrac{R^2}{2}.$

在二重积分 $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 中对所指定的域 Ω,按照不同的顺序安置积分的上下限(3916 ~ 3922).

【3916】 Ω 为带有顶点 $O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(1,1)$ 的三角形.



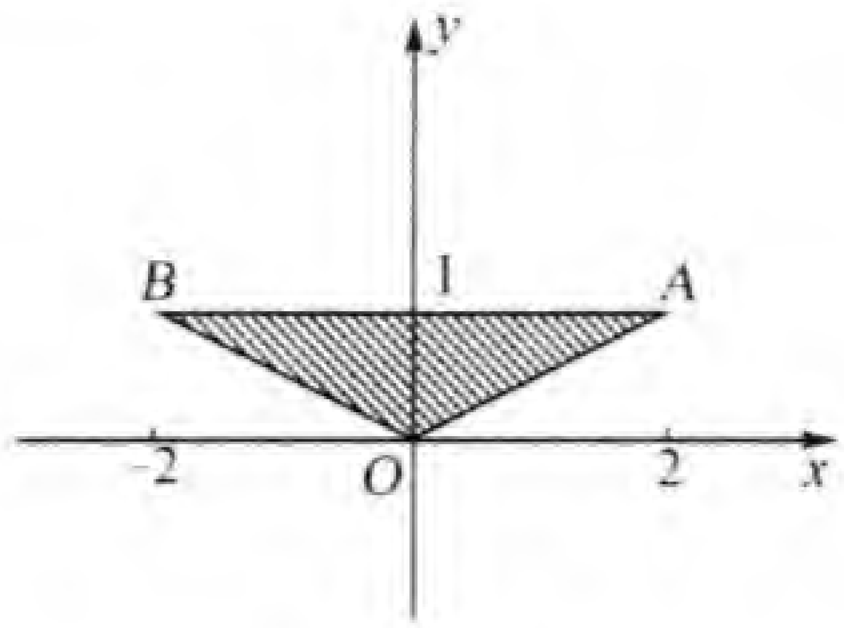
3916 题图

解 为方便起见,以 I 记二重积 $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

【3917】 Ω 为以 $O(0,0)$,$A(2,1)$,$B(-2,1)$ 为顶点的三角形.

解 如 3917 题图所示



3917 题图

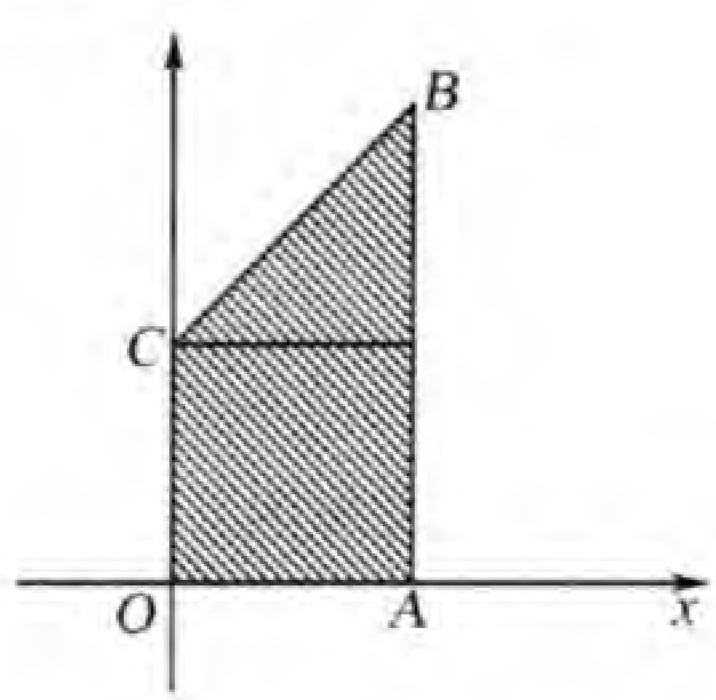
OA 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$,

OB 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x$,

于是 $$I=\int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$$
$$=\int_{-2}^0 dx\int_{-\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)dy+\int_0^2 dx\int_{\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)dy.$$

【3918】 Ω 为以 $O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(1,2)$,$C(0,1)$ 为顶点的梯形.

解 如3918题图所示



3918 题图

BC 的方程为 $y=x+1$,所以

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1+x} f(x,y)dy$$

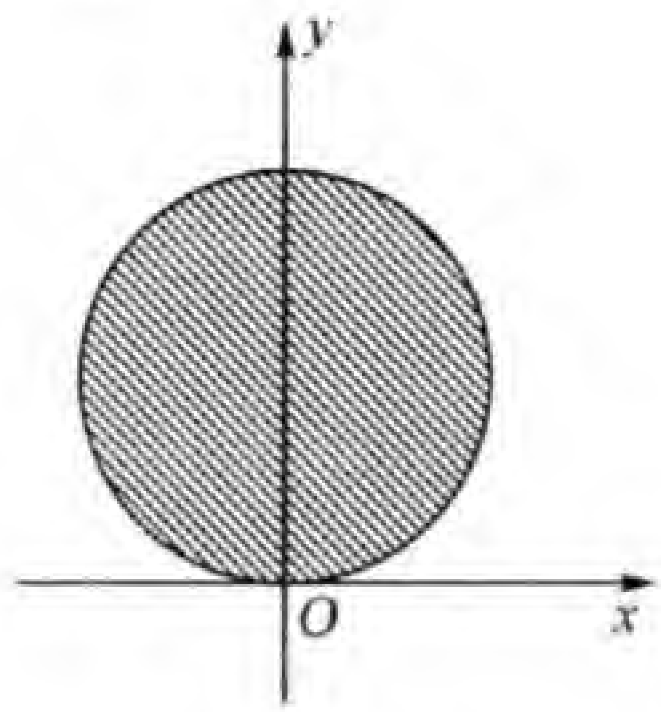
$$= \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x,y)dx.$$

【3919】 Ω 为圆 $x^2+y^2\leqslant 1$.

解 $I=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy=\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$

【3920】 Ω 为圆 $x^2+y^2\leqslant y$.

解 如 3920 图所示



3920 题图

积分域为

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx.$$

【3921】 Ω 为由曲线 $y=x^2$ 和 $y=1$ 所围成的区域.

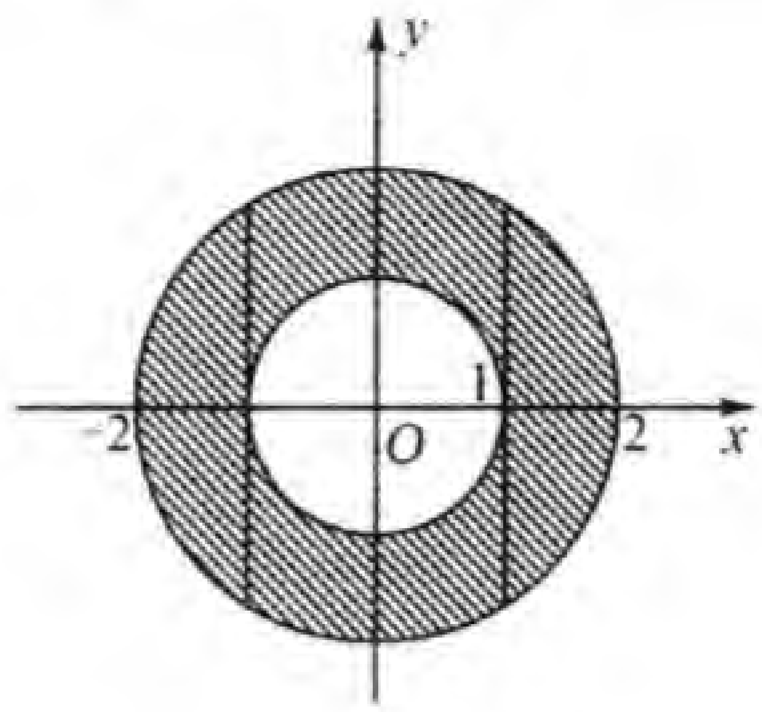
解 $I=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$

【3922】 Ω 为圆环 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

解 如 3922 题图所示

若先对 y 后对 x 积分，则有

$$I=\int_{-2}^{-1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy+\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$$



3922 题图

$$+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

若先对 x 后对 y 积分，则有

$$I=\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$$

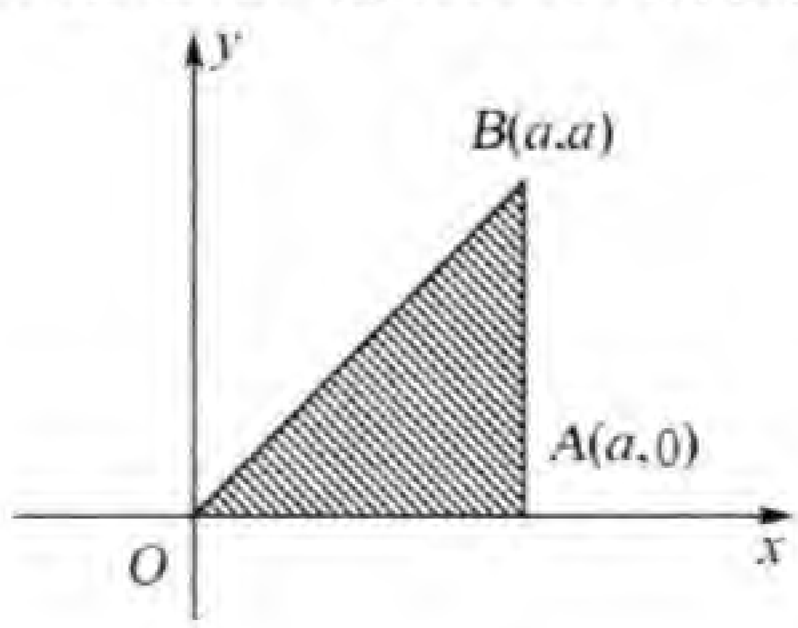
$$+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3923】 证明狄利克雷公式：

$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^a\mathrm{d}y\int_y^a f(x,y)\mathrm{d}x\qquad(a>0)$$

证 $\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}y\int_y^a f(x,y)\mathrm{d}x$

其中 Ω 是以 $A(a,0)$，$B(a,a)$ 及 $O(0,0)$ 为顶点的三角形域.

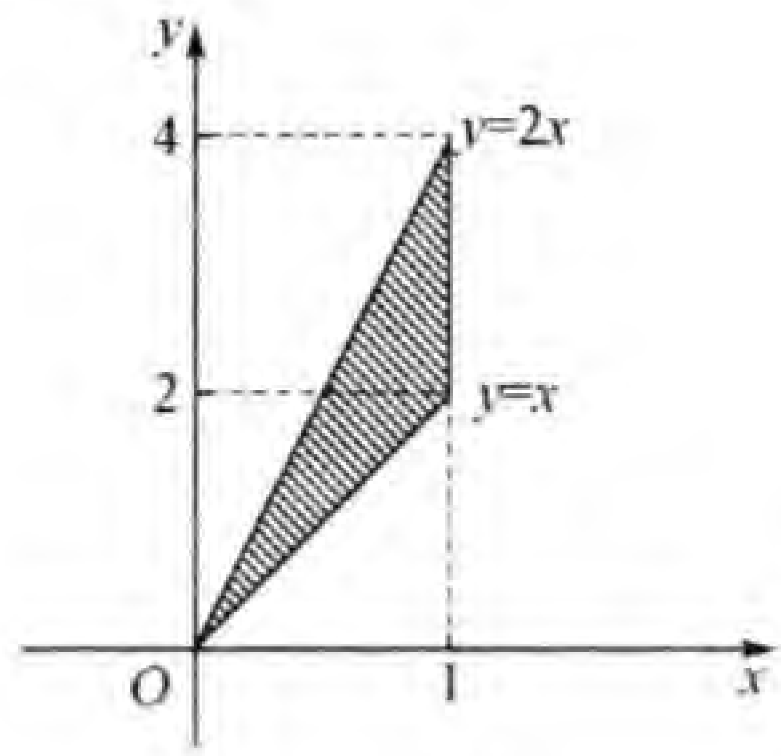


3923 题图

在下列积分中改变积分的顺序(3924 ～ 3931).

【3924】 $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y.$

解 如 3924 题图所示



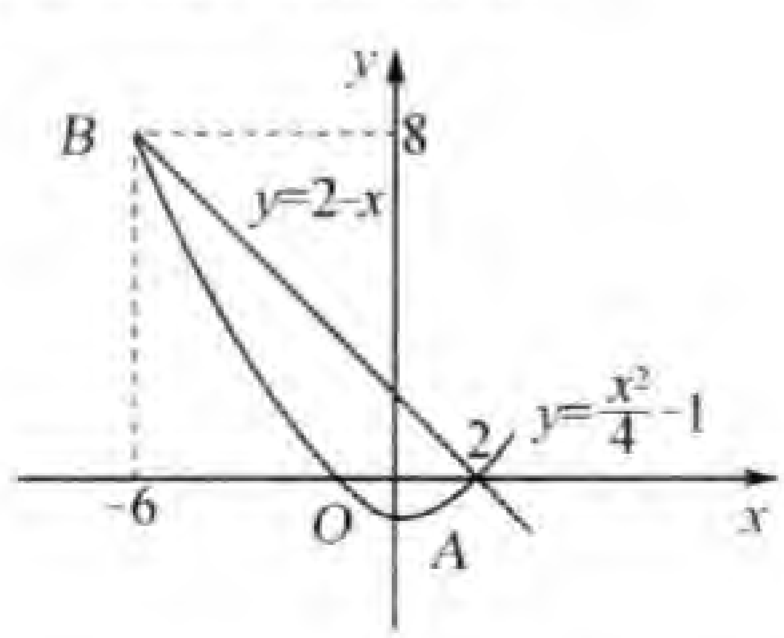
3924 题图

积分区域是由 $y=x$,$y=2x$ 及 $x=2$ 所围成.改变积分顺序即得

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_2^4 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3925】 $\int_{-6}^{2} \mathrm{d}x \int_{\left(\frac{x^2}{4}\right)-1}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y.$

解 积分域的围线为:$y=2-x$ 及 $y=\frac{x^2}{4}-1$.其交点为 $A(2,0)$,$B(-6,8)$. 如 3925 题图所示



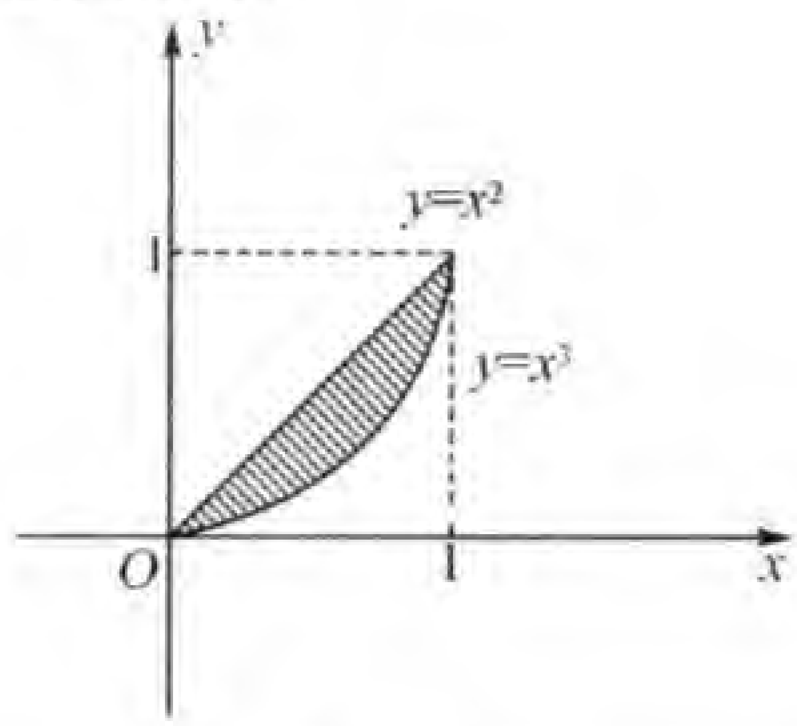
3925 题图

改变积分顺序即有

$$\int_{-6}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{0}^{8}\mathrm{d}y\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3926】 $\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^3}^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y.$

解 如 3926 题图所示



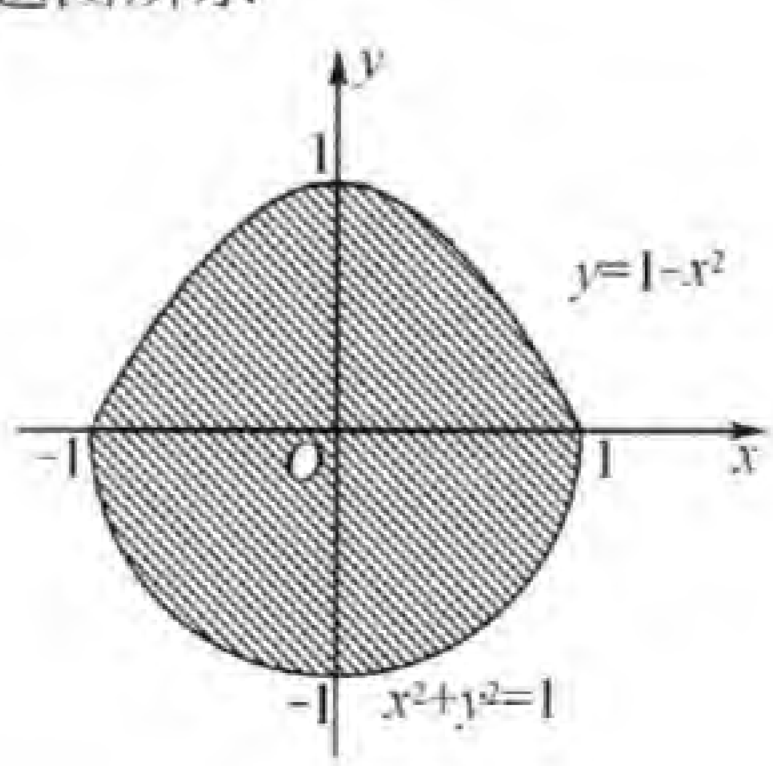
3926 题图

积分域的边界为 $y=x^2$ 及 $y=x^3$，其交点为 $(0,0)$，$(1,1)$，所以

$$\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^3}^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3927】 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y.$

解 如 3927 题图所示



3927 题图

积分区域的围线为圆 $x^2+y^2=1(y\leqslant 0)$ 及抛物线 $y=1-$

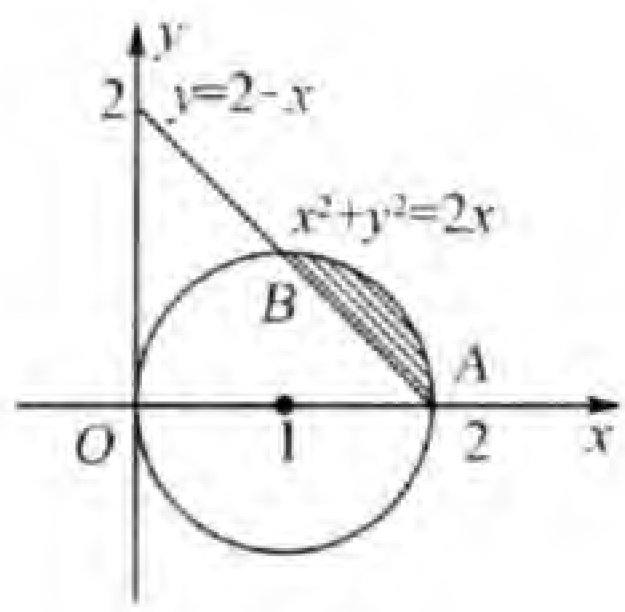
$x^2(y\geqslant 0)$，则

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3928】 $\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y.$

解　如 3928 题图所示



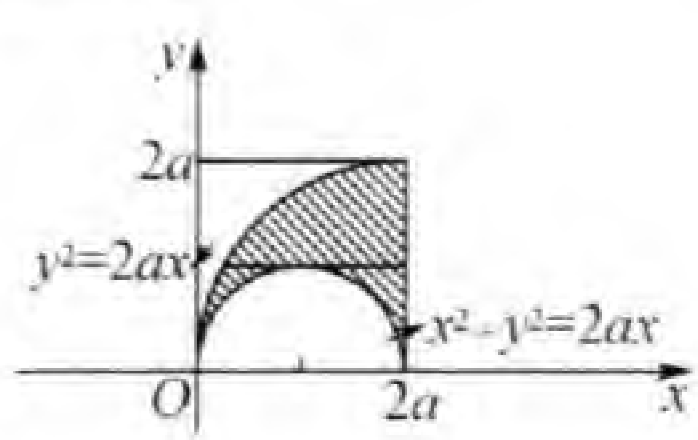
3928 题图

积分区域的围线为圆$(x-1)^2+y^2=1$及直线$y=2-x$，其交点为$A(2,0)$，$B(1,1)$，改变积分顺序即得

$$\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3929】 $\int_{0}^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y\qquad(a>0).$

解　如 3929 题图所示



3929 题图

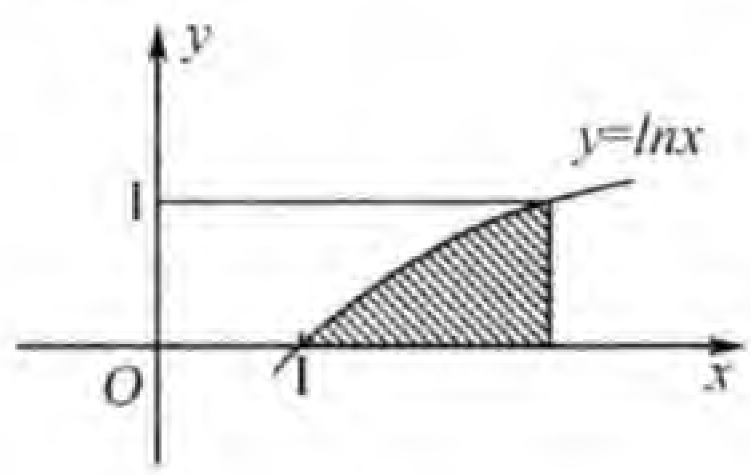
积分域围线为$(x-a)^2+y^2=a^2(y\geqslant 0)$，$y^2=2ax(y\geqslant 0)$.

及 $x = 2a$，所以

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy$$
$$= \int_0^a dy \left\{ \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx \right\}$$
$$+ \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx.$$

【3930】 $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy.$

解 如 3930 题图所示



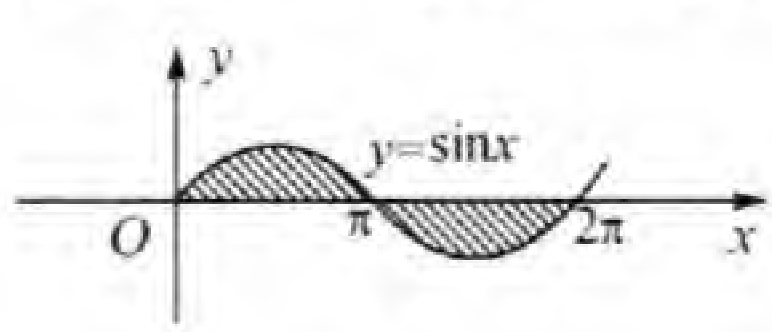
3930 题图

积分域的围线为 $y = \ln x$，$x = e$ 及 $y = 0$. 所以

$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y)dx.$$

【3931】 $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy.$

解 积分域如 3931 题图所示的阴影部分，由于 $y = \sin x$ 的反函数，当 y 从 0 变到 1 时为 $x = \arcsin y$，当 y 从 1 变到 -1 时为 $x = \pi - \arcsin y$，当 y 再由 -1 变到 0 时，为 $x = 2\pi + \arcsin y$.



3931 题图

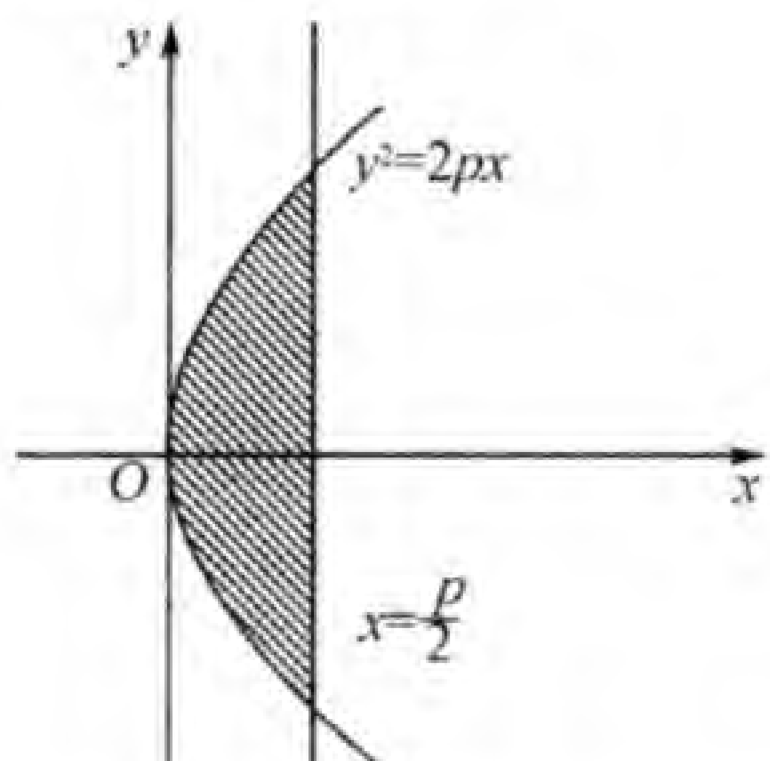
于是 $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x - \int_{-1}^0 \mathrm{d}y \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

计算以下积分(3932 ~ 3936).

【3932】　若域 Ω 由抛物线 $y^2 = 2px$ 和直线 $x = \frac{p}{2}(p > 0)$ 围成,求 $\iint\limits_{\Omega} xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　积分域如 3932 题图所示



3932 题图

$$\iint\limits_{\Omega} xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-p}^{p} \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} xy^2 \mathrm{d}x = \int_{-p}^{p} \left(\frac{p^2}{8}y^2 - \frac{1}{8p^2}y^6\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{28}\right)p^5 = \frac{p^5}{21}.$$

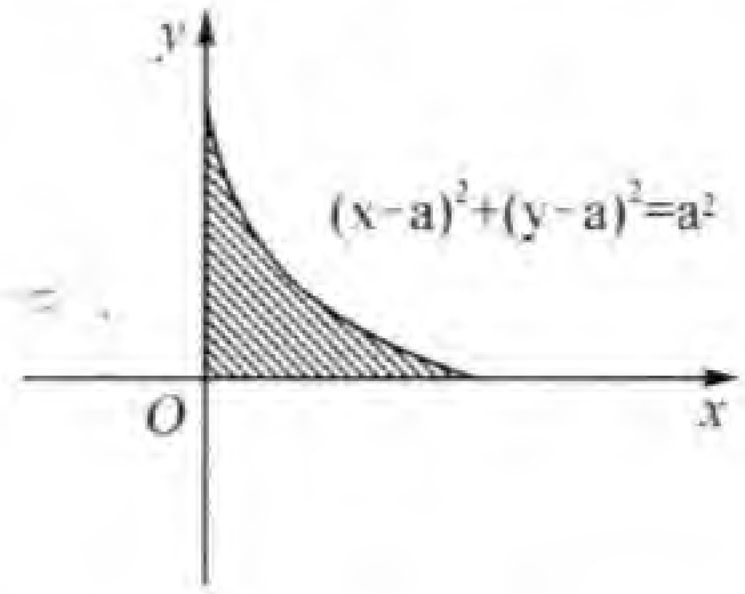
【3933】　若域 Ω 由在半径为 a 圆心在点 (a,a) 且与坐标轴相切的较短圆弧和坐标轴围成的区域,求

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}} \quad (a > 0).$$

解　如 3933 题图所示

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}} = \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2a-x}} \int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^a \frac{a\mathrm{d}x}{\sqrt{2a-x}} - \int_0^a \sqrt{x}\mathrm{d}x = \left(2\sqrt{2} - \frac{8}{3}\right)a\sqrt{a}.$$



3933 题图

【3934】 若域 Ω 是坐标原点为圆心半径为 a 的圆，求 $\iint\limits_{\Omega} |xy| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 由对称性知

$$\iint\limits_{\Omega} |xy| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\mathrm{d}y$$

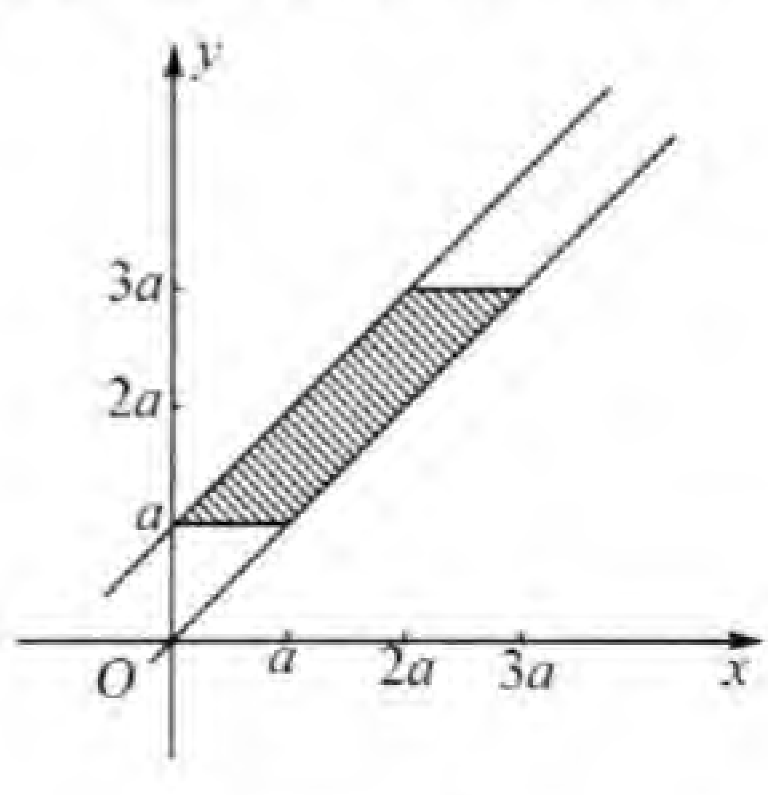
$$= 2\int_0^a (a^2-x^2)x\mathrm{d}x = \frac{a^4}{2}.$$

【3935】 若域 Ω 为以

$$y=x, y=x+a, y=a \text{ 和 } y=3a(a>0)$$

为边的平行四边形，求 $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 积分区域如 3935 题图所示的阴影部分



3935 题图

$$\iint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^{3a}\left[\frac{y^3}{3}+ay^2-\frac{(y-a)^3}{3}\right]\mathrm{d}y=14a^4.$$

【3936】 若域 Ω 由横坐标轴和摆线第一拱的弧

$$x=a(t-\sin t),Y=a(1-\cos t)$$

围成，求$\iint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 $$\iint_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y_1}y^2\mathrm{d}y$$
$$=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4\mathrm{d}t=\frac{2^4a^4}{3}\int_0^{2\pi}\sin^8\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{2^5a^4}{3}\int_0^{\pi}\sin^8u\mathrm{d}u=\frac{2^6a^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8u\mathrm{d}u.$$

其中 $y_1=a(1-\cos t)$,

利用 2281 题的结果知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

所以 $$\iint_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2^6a^4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{35}{12}\pi a^4.$$

在二重积分$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$中假定$x=r\cos\varphi$和$y=r\cos\varphi$，变换到极坐标$r$和$\varphi$，并确定积分上下限，若(3937 ~ 3941).

【3937】 Ω 圆为 $x^2+y^2\leqslant a^2$.

解 对于圆 $x^2+y^2\leqslant a^2$，φ 从 0 变到 2π，r 从 0 变到 a，所以

$$\iint_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r.$$

【3938】 Ω 为 $x^2+y^2\leqslant ax\,(a>0)$ 的圆.

解 圆 $x^2+y^2=ax$ 的极坐标方程为$r=a\cos\varphi$，当 φ 从$-\frac{\pi}{2}$变到$\frac{\pi}{2}$时，对于每一固定的 φ，r 从 0 变到 $a\cos\varphi$，于是

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{a\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\mathrm{d}r.$$

【3939】 Ω 为 $a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$ 的环.

解 $$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{|a|}^{|b|} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\mathrm{d}r.$$

【3940】 Ω 为 $0 \leqslant x \leqslant 1; 0 \leqslant y \leqslant 1-x$ 的三角形.

解 直线 $x+y=1$ 的极坐标方程为

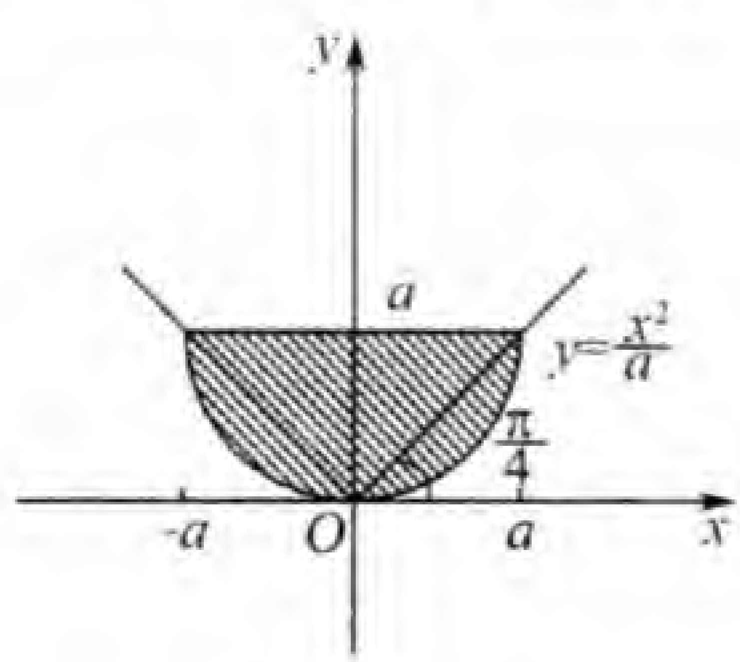
$$r = \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right).$$

当 φ 由 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，对每一固定的 φ，r 由 0 变到 $\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$，所以

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\mathrm{d}r.$$

【3941】 Ω 为 $a \leqslant x \leqslant a, \frac{x^2}{a} \leqslant y \leqslant a$ 的抛物线段.

解 积分区域如 3941 题图所示的阴影部分.



3941 题图

抛物线的极坐标方程为

$$r = \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

直线 $y=a$ 的极坐标方程为 $r = \frac{a}{\sin\varphi}$，所以

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\mathrm{d}r$$
$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\mathrm{d}r$$
$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\mathrm{d}r.$$

【3942】 在变换极坐标之后，在什么情况下积分的上下限是常数？

解 若变换为坐标后，积分

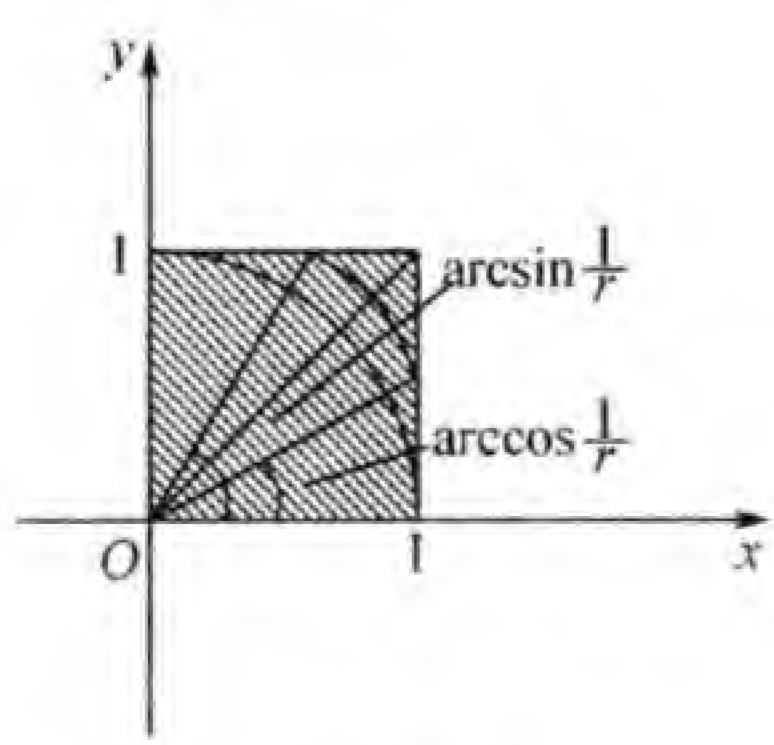
$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta\mathrm{d}\varphi\int_a^b f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\mathrm{d}r,$$

其中 α,β,a,b 均为常数，则表明积分域 Ω 为圆环面 $a\leqslant r\leqslant b$ 被射线 $\varphi=\alpha,\varphi=\beta$ 截出的部分.

在下列积分中，假定 $x = r\cos\varphi$ 和 $y = r\cos\varphi$，变换到极坐标 r 和 φ，并按照不同的顺序确定积分的上下限(3943 ~ 3947).

【3943】 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y.$

解 如 3943 题图所示



3943 题图

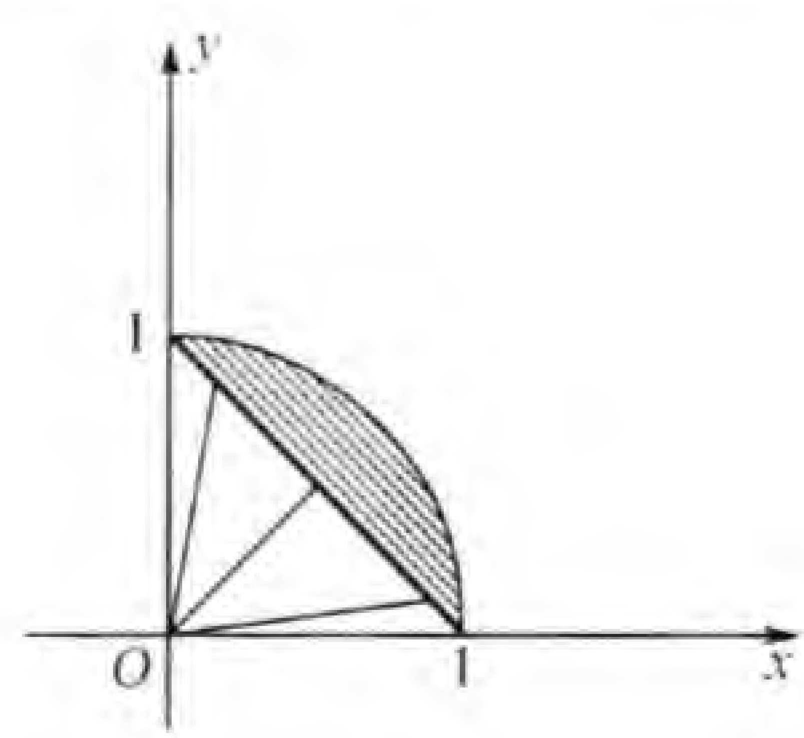
积分区域为图中阴影部分若先对 r 积分，则当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时，r 从 0 变到 $\sec\varphi$(直线 $x=1$ 上的点). 当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，r 从 0 变到 $\csc\varphi$(直线 $y=1$ 上的点).

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 1 时，对于每一固定的 r，φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$，当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\arccos\frac{1}{r}$ 变到 $\arcsin\frac{1}{r}$，所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{\sec\varphi} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr \\ &\quad+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\csc\varphi} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr \\ &=\int_0^1 rdr\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)d\varphi \\ &\quad+\int_1^{\sqrt{2}} rdr\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)d\varphi.\end{aligned}$$

【3944】 $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

解 积分区域为 3944 题图中的阴影部分. 圆 $x^2+y^2=1$ 的极坐标方程为 $r=1$.



3944 题图

直线 $x+y=1$ 的极坐标方程为

$$r=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right).$$

所以 $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dxdy$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}^{1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} r dr \int_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi.$$

其中直线 $x+y=1$ 的方程为

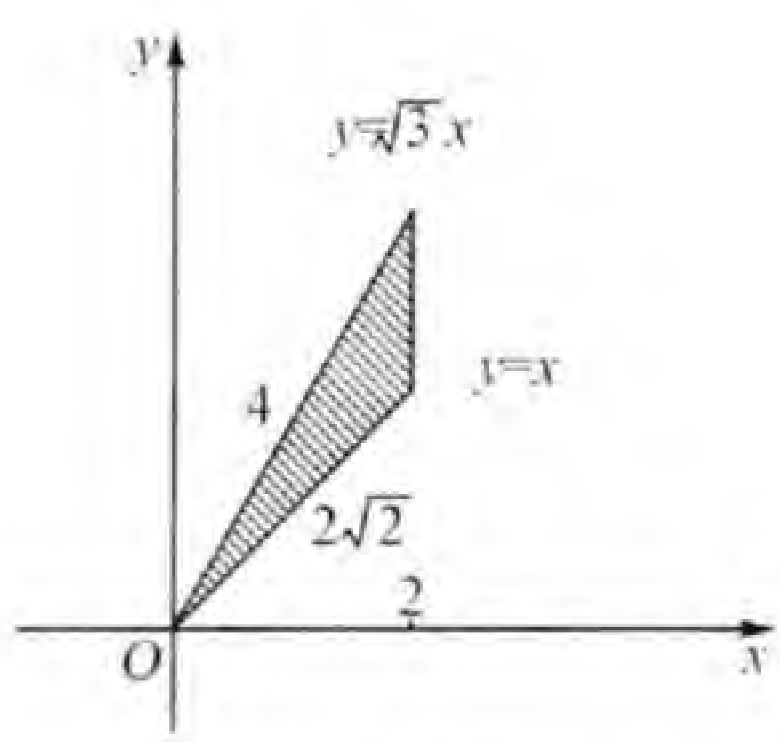
$$r = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)},$$

即 $$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right) = \frac{1}{r\sqrt{2}},$$

或 $$\varphi = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}.$$

【3945】 $\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2}) dy.$

解 积分域3945题图所示的阴影部分，直线 $y=x$ 的极坐标方程为 $\varphi=\frac{\pi}{4}$



3945 题图

直线 $y=\sqrt{3}x(x\geqslant 0)$ 的极坐标方程为 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，直线 $x=2$ 的极坐标方程为 $r=\frac{2}{\cos\varphi}$. 于是

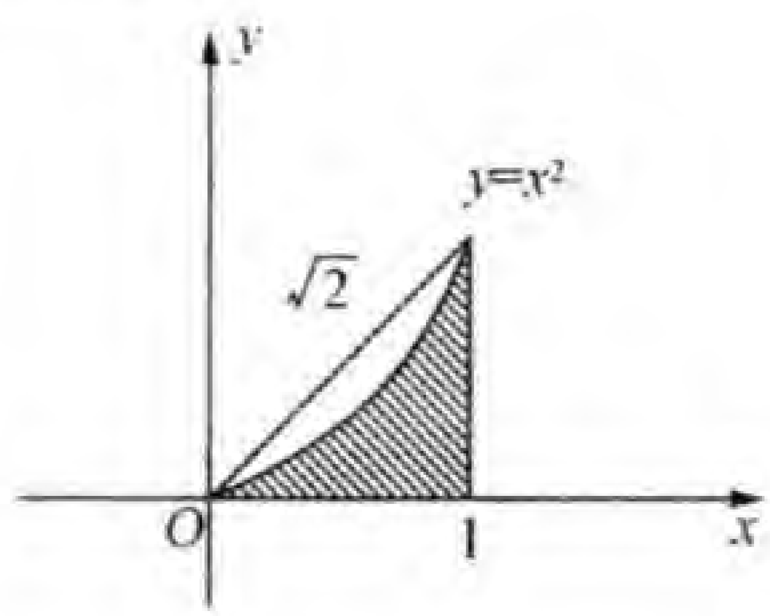
$$\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2}) dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} f(r) r dr$$

$$= \int_0^{2\sqrt{2}} r dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(r) d\varphi + \int_{2\sqrt{2}}^{4} r dr \int_{\arccos\frac{2}{r}}^{\frac{\pi}{3}} f(r) d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{12}\int_0^{2\sqrt{2}} rf(r)\mathrm{d}r + \int_{2\sqrt{2}}^{4}\left(\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{2}{r}\right)rf(r)\mathrm{d}r.$$

【3946】 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y.$

解 积分区域如3946题图所示的阴影部,抛物线 $y = x^2$ 的极坐标方程为 $r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$.



3946 题图

直线 $x = 1$ 的极坐标方程为 $r = \frac{1}{\cos\varphi}$,方程 $r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 也可改写为

$$\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r},$$

所以

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$+ \int_1^{\sqrt{2}} r\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

【3947】 $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中域 Ω 由曲线 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)(x \geqslant 0)$ 围成.

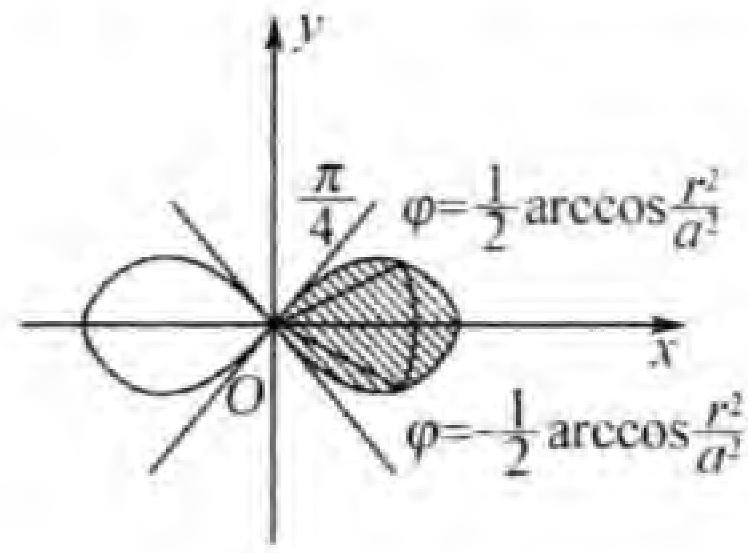
解 曲线

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \qquad (x \geqslant 0),$$

的极坐标方程为

$$r^2=a^2\cos2\varphi.$$

其图形是双纽线的右半部分. 如 3947 题图所示



3947 题图

则 $$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

假定 r 和 φ 为极坐标，改变下列积分中积分的顺序(3948 ~ 3950).

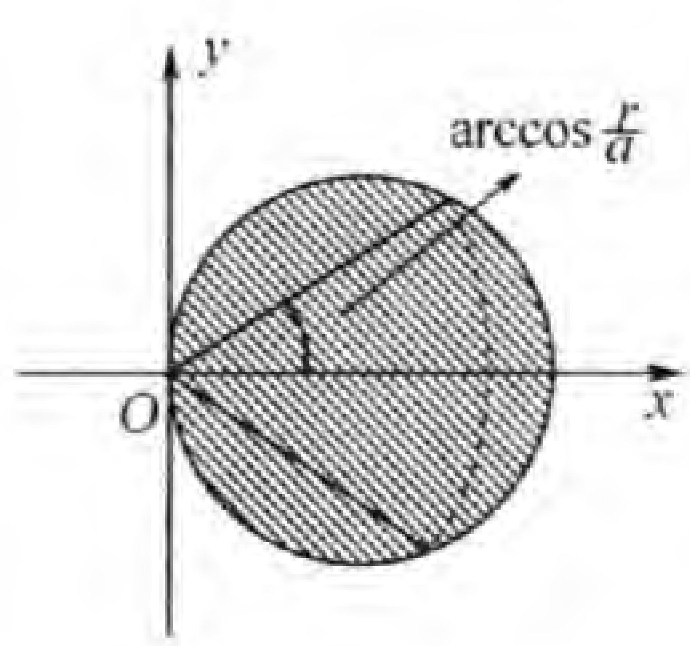
【3948】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}f(\varphi,r)\mathrm{d}r \qquad (a>0).$

解 积分域为由圆周

$$r=a\cos\varphi$$

或 $$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

所围成的圆域



3948 题图

若先对 φ 积分，则对于 $0 \leqslant r \leqslant a$ 中任一固定的 r，φ 由 $-\arccos\dfrac{r}{a}$ 变到 $\arccos\dfrac{r}{a}$，所以

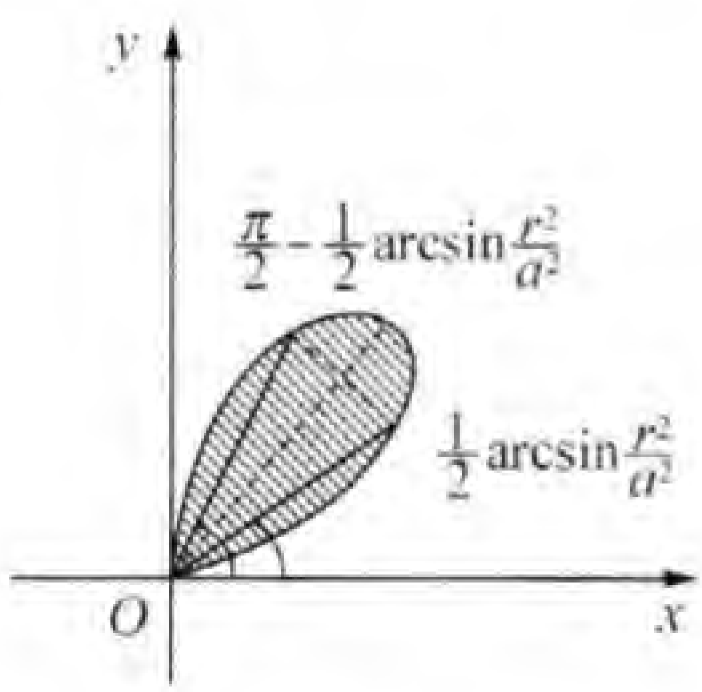
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{a\cos\varphi} f(\varphi, r)\,\mathrm{d}r = \int_{0}^{a} \mathrm{d}r \int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi, r)\,\mathrm{d}\varphi.$$

【3949】 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r)\,\mathrm{d}r \qquad (a > 0).$

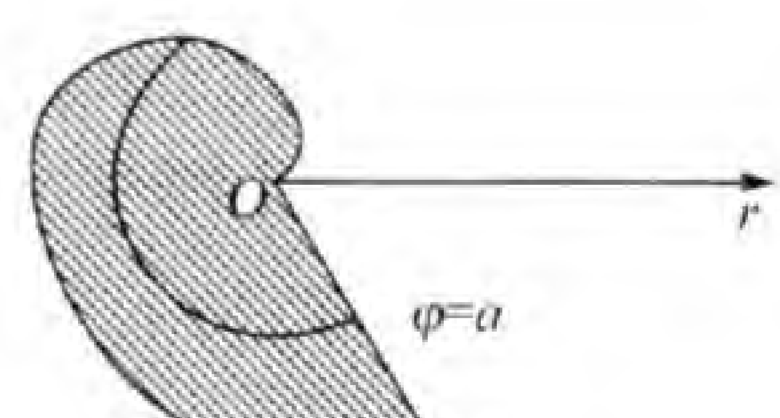
解 积分域是由双曲线 $r^2 = a^2\sin 2\varphi$ 的右上部分围成，如 3949 题图所示

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 a 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{r^2}{a^2}$ 变到 $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{r^2}{a^2}$，于是

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r)\,\mathrm{d}r = \int_{0}^{a} \mathrm{d}r \int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r)\,\mathrm{d}\varphi.$$



3949 题图



3950 题图

【3950】 $\displaystyle\int_{0}^{a} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{\varphi} f(\varphi, r)\,\mathrm{d}r \qquad (0 < a < 2\pi).$

解 积分域是由阿基米德螺线 $r = \varphi$ 与射线 $\varphi = a$ 所围成. 所以

$$\int_{0}^{a} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{\varphi} f(\varphi, r)\,\mathrm{d}r = \int_{0}^{a} \mathrm{d}r \int_{r}^{a} f(\varphi, r)\,\mathrm{d}r.$$

变换为极坐标,并把二重积分化成单积分(3951 ~ 3953).

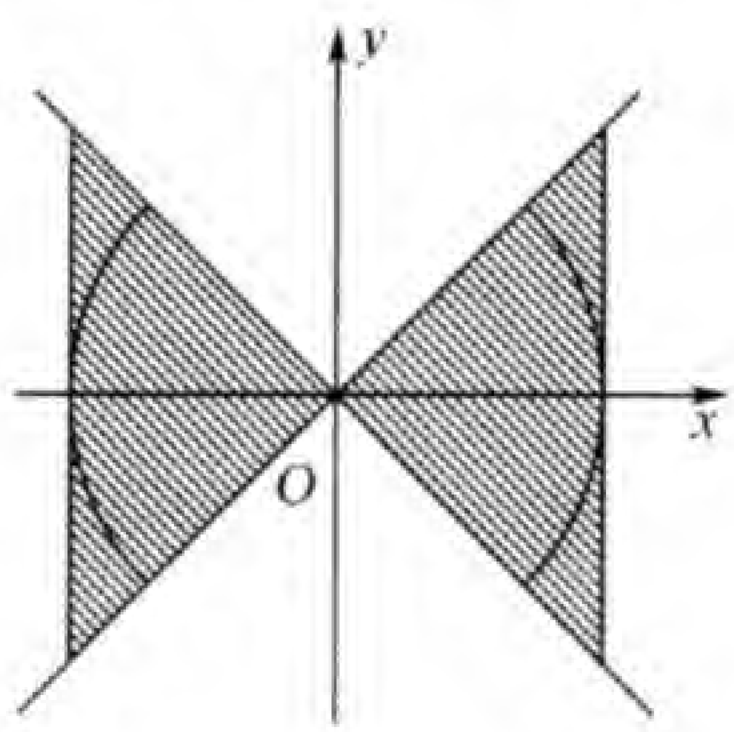
【3951】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r.$$

【3952】 $\iint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

$\Omega = \{|y| \leqslant |x|;\ |x| \leqslant 1\}.$

解 积分域 Ω 如 3952 题图所示. 先对 φ 积分. 当 r 从 0 变到 1 时,对于每个固定的 r,φ 从 $-\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$.



3952 题图

当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时,对于每个固定的 r,φ 从 $\arccos\frac{1}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$.

利用对称性,可得

$$\iint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi + 4\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}} rf(r)\mathrm{d}\varphi$$
$$=\pi\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r + \int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi - 4\arccos\frac{1}{r}\right)rf(r)\mathrm{d}r.$$

【3953】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 圆 $x^2+y^2=x$ 的极坐标方程为 $r=\cos\varphi$，所以

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi} f(\tan\varphi)r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\tan\varphi)\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

变换为极坐标，计算以下二重积分(3954 ~ 3955).

【3954】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\cdot r\mathrm{d}r=\frac{2\pi a^3}{3}.$$

【3955】 $\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 $$\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_\pi^{2\pi} r\sin r\mathrm{d}r=2\pi\int_\pi^{2\pi} r\sin r\mathrm{d}r=-6\pi^2.$$

【3956】 利用一组函数：

$$u=\frac{y^2}{x},v=\sqrt{xy},$$

把正方形 $S\{a<x<a+h,b<y<b+h\}(a>0,b>0)$ 变换成域 S'. 求出域 S' 的面积与 S 面积的比值. 当 $h\to 0$ 时这个比值的极限等于什么？

解 正方形的顶点 $A(a,b)$，$B(a+h,b)$，$C(a+h,b+h)$，$D(a,b+h)$ 对应于 uOv 平面上的点

$$A'\left(\frac{b^2}{a},\sqrt{ab}\right),$$

$$B'\left(\frac{b^2}{(a+h)},\sqrt{(a+h)b}\right),$$

$$C'\left(\frac{(b+h)^2}{a+h},\sqrt{(a+h)(b+h)}\right),$$

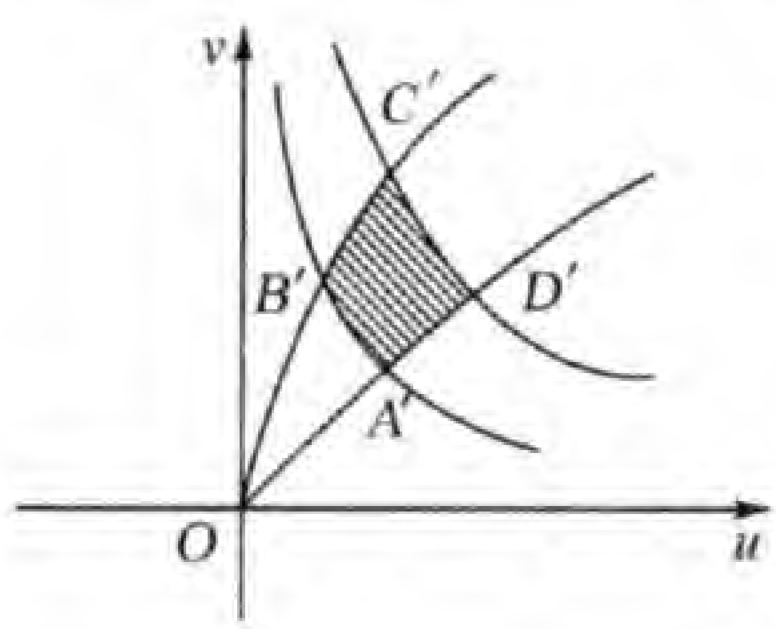
$$D'\left(\frac{(b+h)^2}{a},\sqrt{a(b+h)}\right).$$

正方形的四边 $y=b,x=a+h,y=b+h,x=a$ 分别对应于 uOv 平面上的四条曲线.

$$A'B':u=\frac{b^3}{v^2};B'C':u=\frac{v^3}{(a+h)^3}$$

$$C'D':u=\frac{(b+h)^3}{v^2};D'A':u=\frac{v^4}{a^3}$$

由这四条曲线所围成的域即 S,如 3596 题图所示.



3956 题图

于是 S' 的面积为

$$S'=\iint\limits_{S'}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

而 $$I=\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-\frac{y^2}{x^2} & 2\frac{y}{x}\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\end{vmatrix}=-\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}},$$

所以由二重积分的变量代换公式有

$$S' = \iint\limits_{S'} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_{S} |I| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{3}{2}\int_a^{a+h} x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\int_b^{b+h} y^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}}\right)\left(\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}\right)$$

所以 $$\frac{S'}{S} = \frac{6}{5h^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}}\right)\left(\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}\right)$$

从而 $$\lim_{h\to 0}\frac{S'}{S} = \frac{6}{5}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+h}}$$

$$\cdot \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}}{h}$$

$$= \frac{6}{5a}\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\lim_{h\to 0}\frac{5}{2}\sqrt{(b+h)^3}$$

$$= \frac{6}{5a}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{5}{2}b^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

引入新的变量 u 和 v 代替 x 和 y，并确定下列二重积分中的积分上下限(3957 ～ 3959).

【3957】 若 $u = x$, $v = \dfrac{y}{x}$，求

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)\mathrm{d}y(0 < a < b; 0 < \alpha < \beta).$$

解 在变换 $u = x, v = \dfrac{y}{x}$ 下，区域

$$\Omega = \{(x,y) \mid \alpha x \leqslant y \leqslant bx, a \leqslant x \leqslant b\}.$$

变为

$$\sum = \{(u,v) \mid a \leqslant u \leqslant b, \alpha \leqslant v \leqslant \beta\}.$$

变换的雅可比行列式

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u > 0.$$

所以 $\int_a^b dx\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)dy = \int_a^b u\,du\int_\alpha^\beta f(u,uv)dv.$

【3958】 若 $u = x+y,\ v = x-y$，求 $\int_0^2 dx\int_{1-x}^{2-x} f(x,y)dy.$

解 在变换 $u = x+y, v = x-y$ 下，区域

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 1-x \leqslant y \leqslant 2-x\},$$

变为 $\sum = \{(u,v) \mid 1 \leqslant u \leqslant 2, -u \leqslant v \leqslant 4-v\},$

事实上 $u+v = 2x, u-v = 2y.$

而当 $(x,y) \in \Omega$ 时，有

$$1 \leqslant x+y \leqslant 2,$$

且 $0 \leqslant x \leqslant 2.$

故 $0 \leqslant u+v \leqslant 4, 1 \leqslant u \leqslant 2,$

即 $-u \leqslant v \leqslant 4-u, 1 \leqslant u \leqslant 2.$

变换的雅可比行列式

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

因此 $\int_0^2 dx\int_{1-x}^{2-x} f(x,y)dy = \frac{1}{2}\int_1^2 du\int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)dv.$

【3959】 若 $x = u\cos^4 v, y = u\sin^4 v$，求 $\iint\limits_\Omega f(x,y)dxdy$，其中域 Ω 由曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0 (a > 0)$ 围成.

解 Ω 的围线 $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{a}$ 的参数方程为

$$x = a\cos^4 v, y = a\sin^4 v \qquad \left(0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

故变换 $x = u\cos^4 v, y = u\sin^4 v.$

将区域 Ω 变为区域

$$\sum = \left\{ (u,v) \middle| 0 \leqslant u \leqslant a, 0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2} \right\},$$

而 $|I| = 4|u\cos^3 v\sin^3 v|,$

于是 $$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^a u\mathrm{d}u\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v\sin^3 v f(u\cos^4 v, u\sin^4 v)\mathrm{d}v.$$

【3960】 证明:变量代换

$$x+y=\xi, y=\xi\eta.$$

把三角形 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x$ 变成单位正方形 $0\leqslant \xi\leqslant 1$, $0\leqslant \eta\leqslant 1$.

证 设

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x\},$$

$$\sum=\{(\xi,\eta)\mid 0\leqslant \xi\leqslant 1, 0\leqslant \eta\leqslant 1\}.$$

当 $(x,y)\in\Omega$ 时,由 $0\leqslant y\leqslant 1-x$ 及 $0\leqslant x\leqslant 1$ 得, $0\leqslant x+y\leqslant 1$ 即 $0\leqslant\xi\leqslant 1$,又 $\eta=\dfrac{y}{\xi}=\dfrac{y}{x+y}\leqslant\dfrac{y}{0+y}=1$,且 $\eta\geqslant 0$,故 $0\leqslant\eta\leqslant 1$,即 $(\xi,\eta)\in\sum$.

反之,若 $(\xi,\eta)\in\sum$,则由 $0\leqslant\xi\leqslant 1, 0\leqslant\eta\leqslant 1$ 得, $0\leqslant x+y\leqslant 1$,又 $y=\xi\eta, x=\xi(1-\eta)$,从而 $0\leqslant x\leqslant 1$,即 $(x,y)\in\Omega$.

因此,变换 $x+y=\xi, y=\xi\eta$,将 Ω 变为 $\sum$.

【3961】 在什么样的变量代换下,可把由曲线 $xy=1, xy=2, x-y+1=0, x-y-1=0(x>0, y>0)$ 围成的曲线四边形变成其边平行于坐标轴的矩形?

解 作变换

$$u=xy, v=x-y,$$

该变换将所给区域变为区域

$$\sum=\{(u,v)\mid 1\leqslant u\leqslant 2, -1\leqslant v\leqslant 1\}.$$

进行相应的变量代换,把二重积分简化成单积分(3962 ~ 3964).

【3962】 $$\iint_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 作变换

$$u = x + y, v = x - y,$$

即 $$x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}.$$

则有 $|I| = \frac{1}{2}$，且将所给积分域变为

$$\sum = \{(u,v) \mid -1 \leqslant u \leqslant 1, -1 \leqslant v \leqslant 1\}.$$

因此 $$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u = \int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u.$$

【3963】 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (a^2+b^2 \neq 0).$$

解 作变换

$$\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}} = u, \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}} = v,$$

即 $$x = \frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}, y = \frac{bu-av}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

则有 $$u^2+v^2 = x^2+y^2 \leqslant 1.$$

即变换将域 $x^2+y^2 \leqslant 1$ 变为域 $u^2+v^2 \leqslant 1$，且

$$I = \begin{vmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{vmatrix} = -1,$$

即 $$|I| = 1.$$

因此 $$\begin{aligned} &\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c)\mathrm{d}v \\ &= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

【3964】 $\iint\limits_{\Omega} f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中域 Ω 由曲线 $xy=1$,$xy=2$,$y=x$,$y=4x(x>0,y>0)$ 围成.

解 作变换

$$xy=u,\frac{y}{x}=v,$$

则域 Ω 变换

$$\sum=\{(u,v)\mid 1\leqslant u\leqslant 2,1\leqslant v\leqslant 4\},$$

且
$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{u}}{v^{\frac{3}{2}}}\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v},$$

所以
$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^4\frac{\mathrm{d}v}{2v}\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u=\ln 2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u.$$

计算下列二重积分(3965 ~ 3973).

【3965】 $\iint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中域 Ω 由曲线 $x^2+y^2=x+y$ 围成.

解 积分域 Ω 为圆域

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

作变换 $x=\dfrac{1}{2}+r\cos\varphi,y=\dfrac{1}{2}+r\sin\varphi$,

则 Ω 变为$\sum=\left\{(r,\varphi)\middle|0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$,

且 $|I|=r$,

所以
$$\iint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1+r\cos\varphi+r\sin\varphi)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.$$

【3966】 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x+y)\mathrm{d}y = \frac{4}{3}$.

【3967】 $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中域 Ω 由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 围成.

解 作变换

$$x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi,$$

则域 Ω 变为域

$$\sum = \{(r,\varphi) \mid 0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\},$$

且 $\quad |I| = abr$,

所以
$$\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abr\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r$$
$$= 2\pi ab\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r = \frac{2\pi ab}{3}.$$

【3968】 $\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 作变换

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi,$$

并利用对称性得

$$\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\left(\frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}\right)^{\frac{1}{4}}} r^3\mathrm{d}r$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\varphi\mathrm{d}(\tan\varphi)}{1+\tan^4\varphi}.$$

令 $\quad \tan\varphi = t$,

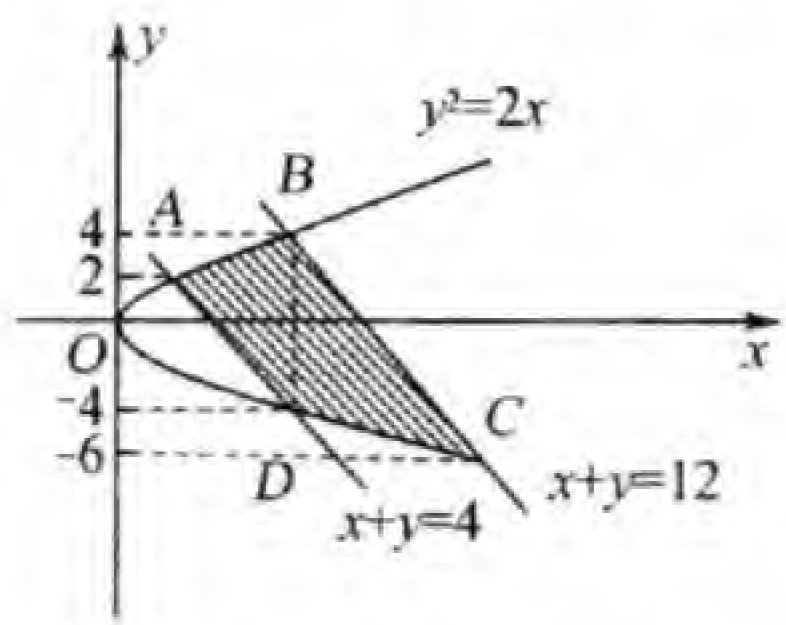
并利用 1712 题的结果可得

$$\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1\frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

【3969】 $\iint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中域 Ω 由曲线 $y^2=2x$,$x+y=4$,$x+y=12$ 围成.

解 解方程组

$$\begin{cases}x+y=4,\\ y^2=2x\end{cases}\quad 及 \quad \begin{cases}x+y=1,\\ y^2=2x\end{cases}$$



3969 题图

可求得两直线与抛物线的交点分别为 $A(2,2)$,$B(8,4)$,$C(18,-6)$,$D(8,-4)$.

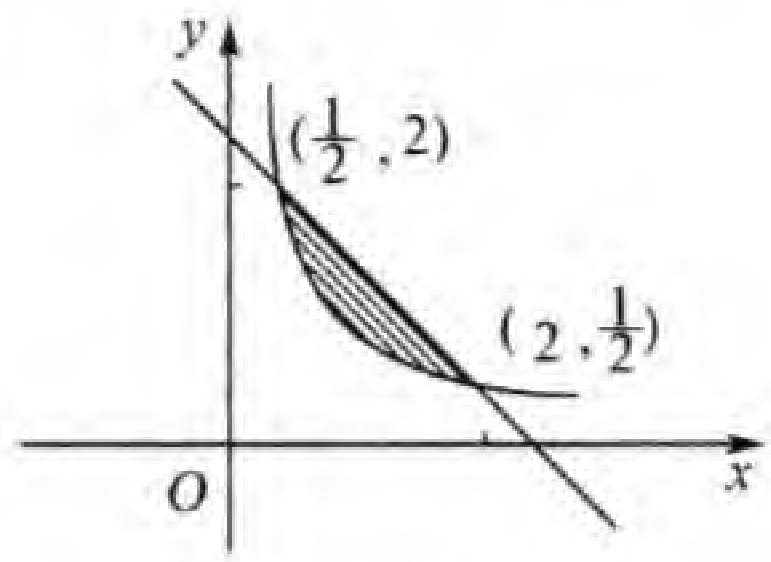
$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_2^8\mathrm{d}x\int_{4-x}^{\sqrt{2x}}(x+y)\mathrm{d}y+\int_8^{18}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x}(x+y)\mathrm{d}y\\ &=\int_2^8\left(-8+x+\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_8^{18}\left(72-x+\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x\\ &=543\,\frac{11}{15}.\end{aligned}$$

【3970】 $\iint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中域 Ω 由曲线 $xy=1$,$x+y=\frac{5}{2}$ 围成.

解 解方程组

$$\begin{cases}xy=1,\\ x+y=\frac{5}{2}.\end{cases}$$

得曲线与直线的交点为$\left(\frac{1}{2},2\right),\left(2,\frac{1}{2}\right)$.



3970 题图

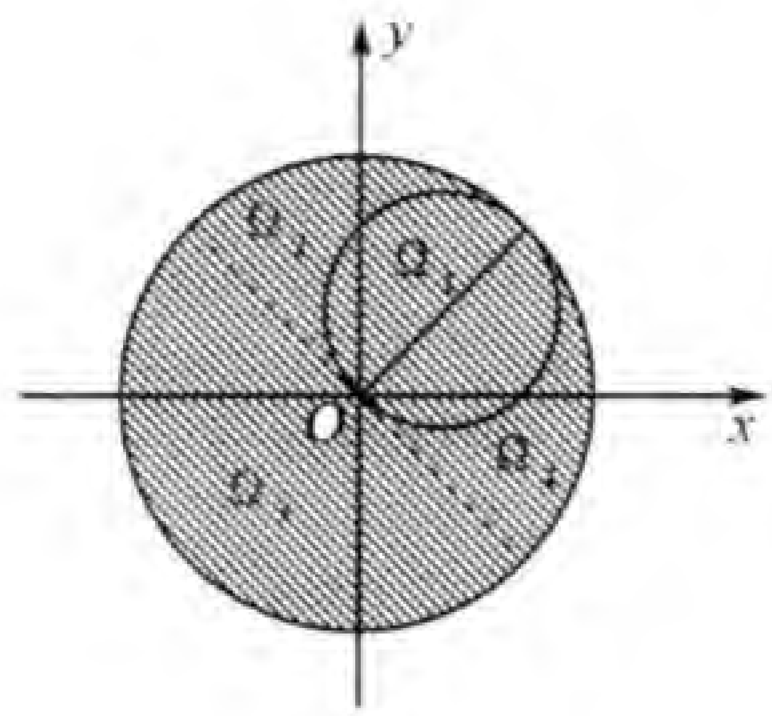
所以
$$\iint_{\Omega} xy\,dx\,dy=\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\,dx\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x}y\,dy$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{25}{4}x-5x^2+x^3-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=1\frac{37}{128}-\ln 2.$$

【3971】 $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}|\cos(x+y)|\,dx\,dy.$

解
$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}|\cos(x+y)|\,dx\,dy=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\pi}|\cos(x+y)|\,dy$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\pi}|\cos(x+y)|\,dy+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_0^{\pi}|\cos(x+y)|\,dy$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy-\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi}\cos(x+y)dy\right]dx$$
$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[-\int_0^{\frac{3\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy+\int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi}\cos(x+y)dy\right]dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-\left(\sin(\pi+x)-\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]dx$$
$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[-\sin\frac{3\pi}{2}+\sin x+\left(\sin(x+\pi)-\sin\frac{3\pi}{2}\right)\right]dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2dx=2\pi.$$

【3972】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解 积分区域如3972题图所示，由 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$ 组成，其中 Ω_1 为由圆



3972 题图

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2=0,$$

即
$$\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

围成的区域. 该圆的极坐标方程为

$$r=\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right),$$

而圆 $x^2+y^2=1$ 的极坐标方程为 $r=1$，于是，各区域为

$$\Omega_1=\left\{(r,\varphi)\middle|-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4},0\leqslant r\leqslant\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right\},$$

$$\Omega_2=\left\{(r,\varphi)\middle|\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4},\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant r\leqslant 1\right\},$$

$$\Omega_3=\left\{(r,\varphi)\middle|\frac{3\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{7\pi}{4},0\leqslant r\leqslant 1\right\},$$

$$\Omega_4=\left\{(r,\varphi)\middle|-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant r\leqslant 1\right\},$$

而在 Ω_1 内 $\frac{x+y}{\sqrt{2}}-(x^2+y^2)\geqslant 0$，

在 Ω_1 外 $\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}-(x^2+y^2)\leqslant 0$.

因此 $$\iint\limits_{x^2+y^2}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}\left[r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-r^2\right]r\mathrm{d}r$$

$$+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}^{1}\left[r^2-r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]r\mathrm{d}r$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}^{1}\left[r^2-r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]r\mathrm{d}r$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left[r^2-r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]r\mathrm{d}r$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}\left[r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-r^2\right]r\mathrm{d}r$$

$$+2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}^{1}\left[r^2-r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]r\mathrm{d}r$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left[r^2-r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{6}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\varphi+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin^4\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\sin^4\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}\varphi+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\mathrm{d}u+\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}=\frac{9\pi}{16}.$$

注:利用 2281 题的结论可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\mathrm{d}u=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}.$$

【3973】 $$\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 $$\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant x^2}} \sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ x^2\leqslant y\leqslant 2}} \sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x + \frac{4}{3}\int_0^1 (2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

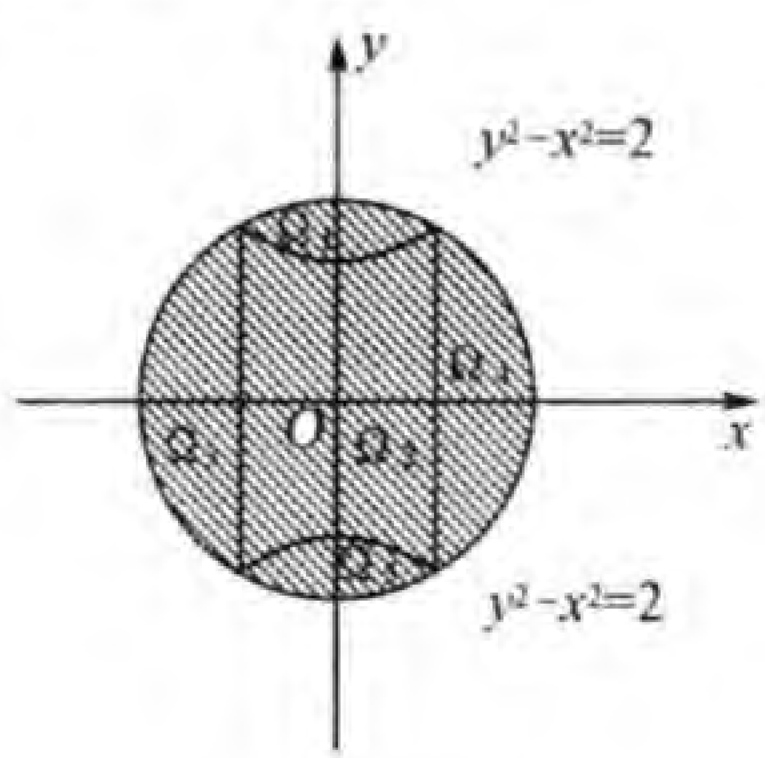
$$= \frac{1}{3} + \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3} + \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{16}{3}\left(\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}.$$

计算不连续函数的积分(3974 ~ 3976).

【3974】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \mathrm{sgn}\,(x^2-y^2+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解 如 3974 题所示



3974 题图

将积分域 Ω 分为 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4,\Omega_5$ 五部分,其围线分别为 $x^2+y^2=4$,$y^2-x^2=2$ 及 $x=\pm 1$. 在 Ω_1,Ω_5,$y^2-x^2>2$,在 Ω_2,Ω_3,Ω_4 中,$y-x^2<2$,因此

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \mathrm{sgn}(x^2-y^2+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint\limits_{\Omega_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{\Omega_5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega_4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

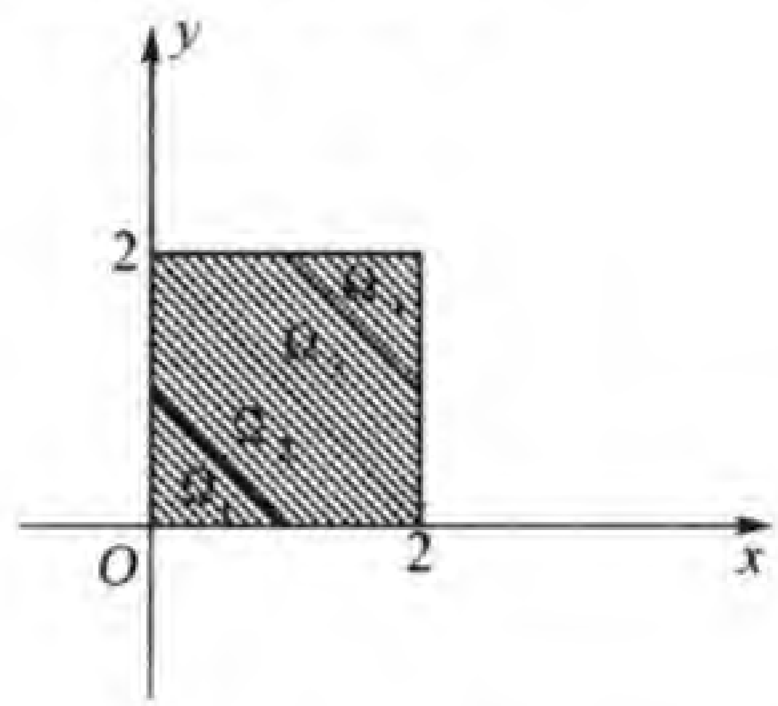
$$=-4\int_0^1 dx\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy+4\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2+x^2}} dy+4\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy$$

$$=8\int_0^1 \sqrt{2+x^2}dx+4\left(\int_1^2 \sqrt{4-x^2}dx-\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\right)dx$$

$$=\frac{4}{3}\pi+8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

【3975】 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}} [x+y]dxdy.$

解 如 3975 题所示将 Ω 分为



3975 题图

$$\Omega_1: x+y\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0,$$
$$\Omega_2: 1\leqslant x+y<2, x\geqslant 0, y\geqslant 0,$$
$$\Omega_3: 2\leqslant x+y<3, x\leqslant 2, y\leqslant 2,$$
$$\Omega_4: 3\leqslant x+y, x\leqslant 2, y\leqslant 2.$$

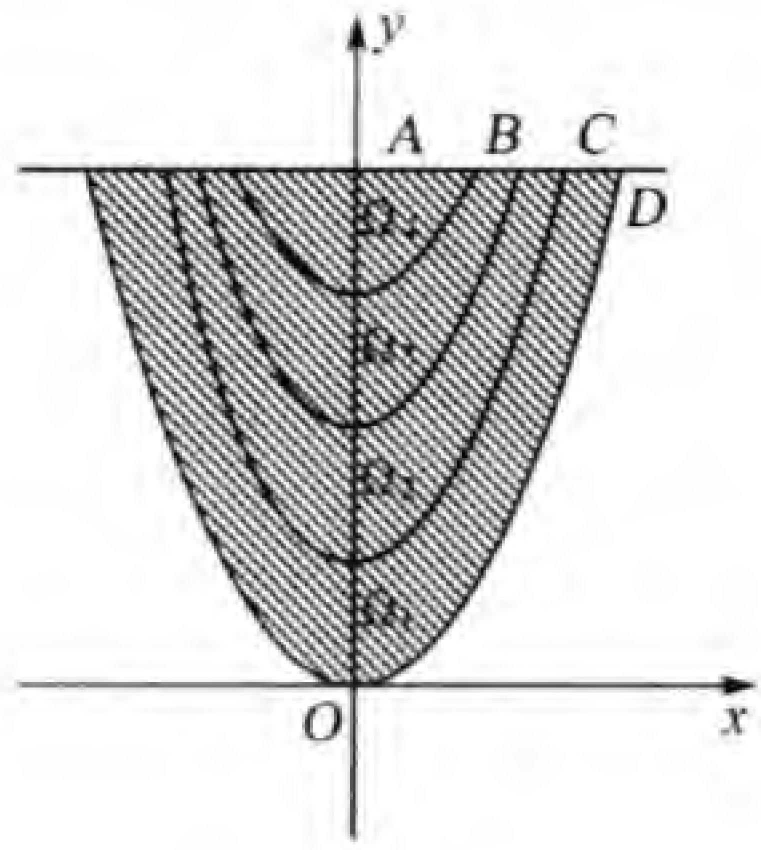
因此 $$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}} [x+y]dxdy=\iint\limits_{\Omega_2}dxdy+2\iint\limits_{\Omega_3}dxdy+3\iint\limits_{\Omega_4}dxdy$$

$$=\frac{3}{2}S=6,$$

其中 S 为 Ω 的面积.

【3976】 $\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 4} \sqrt{[y-x^2]}dxdy.$

解 如 3976 题图所示



3976 题图

将 Ω 分为下面四个部分

Ω_1:由 $y=x^2$,$y=x^2+1$ 及 $y=4$ 围成,

Ω_2:由 $y=x^2+1$,$y=x^2+2$ 及 $y=4$ 围成,

Ω_3:由 $y=x^2+2$,$y=x^2+3$ 及 $y=4$ 围成,

Ω_4:由 $y=x^2+3$ 及 $y=4$ 围成.

抛物线 $y=x^2+3$,$y=x^2+2$,$y=x^2+1$ 及 $y=x^2$ 与直线 $y=4$ 在第一象限内的交点分别为 $A(1,4)$,$B(\sqrt{2},4)$,$C(\sqrt{3},4)$ 及 $D(2,4)$,所以

$$\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 4}\sqrt{[y-x^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Omega_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Omega_3}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Omega_4}\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\left[\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{x^2+2}\mathrm{d}y+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{4}\mathrm{d}y\right]+2\sqrt{2}\left[\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2+2}^{x^2+3}\mathrm{d}y\right.$$

$$\left.+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2+2}^{4}\mathrm{d}y\right]+2\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2+3}^{4}\mathrm{d}y$$

$$=2\left[\sqrt{2}+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(3-x^2)\mathrm{d}x\right]+2\sqrt{2}\left[1+\int_1^{\sqrt{2}}(2-x^2)\mathrm{d}x\right]$$

$$+2\sqrt{3}\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4}{3}(4 + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}).$$

【3977】 证明：若 m 和 n 为正整数，而且其中至少有一个是奇数，则 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$

解 作变换

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi.$$

则得 $$I = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^{m+n+1}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}r$$

$$= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi\right].$$

在上式第二积分中，令

$$\varphi = \pi + t,$$

则得 $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi = (-1)^m\cdot(-1)^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\sin^n t\,\mathrm{d}t.$$

若 m 及 n 中有且仅有一个为奇数，则得

$$(-1)^m\cdot(-1)^n = -1,$$

故 $$I = 0.$$

若 m 与 n 均为奇数，则得

$$(-1)^m(-1)^n = 1,$$

所以 $$I = \frac{2a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

但被积函数在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为奇函数，故 $I = 0$，总之，当 m 和 n 中至少有一个为奇数时

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

【3978】 求

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x,y)$ 为连续函数.

解 利用积分中值定理,可得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= f(x_0,y_0)\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\rho^2 f(x_0,y_0),$$

其中 $\quad (x_0,y_0)\in\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\rho^2\}.$

显然,当 $\rho\to 0$ 时,$(x_0,y_0)\to(0,0)$,因此由 $f(x,y)$ 的连续性有

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{(x_0,y_0)\to(0,0)} f(x_0,y_0)=f(0,0).$$

【3979】 若 $F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}}\mathrm{e}^{\frac{tx}{y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,求 $F'(t)$.

解 本题题目是错误的.

当 $t>0$ 时,$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}}\mathrm{e}^{\frac{tx}{y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是发散的广义积分.事实上,令 $x=ut,y=vt$ 则

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}}\mathrm{e}^{\frac{tx}{y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=t^2\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}}\mathrm{e}^{\frac{u}{v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

而 $$\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}}\mathrm{e}^{\frac{u}{v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^1\mathrm{e}^{\frac{u}{v^2}}\mathrm{d}u=\int_0^1 v^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{v^2}}-1)\mathrm{d}v.$$

对于上式右端的积分,$v=0$ 是奇点.且

$$\lim_{v\to+0}v^2[v^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{v^2}}-1)]=\lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^t-1}{t^2}=+\infty.$$

故广义积分 $\int_0^1 v^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{v^2}}-1)\mathrm{d}v$ 发散并注意到当 $0\leqslant v\leqslant 1$ 时,

$v^2(e^{\frac{1}{v^2}}-1)\geqslant 0$,故

$$\int_0^1 v^2(e^{\frac{1}{v^2}}-1)dv=+\infty.$$

即当 $t>0$ 时,$F(t)=+\infty$,因此,讨论 $F'(t)$ 是没有意义的. 可将题目改为,设

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}} e^{-\frac{x}{y^2}}dxdy.$$

求 $F'(t)$. 这时设 $x=ut$,$y=vt$,则

$$F(t)=t^2\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}} e^{-\frac{u}{v^2}}dudv.$$

而积分 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}} e^{-\frac{u}{v^2}}dudv$ 是收敛的,故

$$F'(t)=2t\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}} e^{-\frac{u}{v^2}}dudv=\frac{2}{t}\cdot t^2\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}} e^{-\frac{u}{v^2}}dudv$$

$$=\frac{2}{t}F(t)\qquad(t>0).$$

【3980】 若 $F(t)=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$,求 $F'(t)$.

解 作变量代换

$$x=u+t,y=v+t,$$

则
$$F(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2}dudv.$$

今在积分号下求导数,得

$$F'(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2}}dudv$$

$$=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy.$$

【3981】 若 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(x,y)dxdy(t>0)$,求 $F'(t)$.

解 令 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$.

则 $$F(t) = \int_0^t \mathrm{d}r\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\mathrm{d}\varphi.$$

故得 $$F'(t) = \int_0^{2\pi} f(t\cos\varphi, t\sin\varphi)t\mathrm{d}\varphi.$$

注:此题中应假设 $f(x,y)$ 为连续函数.

【3982】 证明:若 $f(x,y)$ 是连续的,则函数:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^x \mathrm{d}\xi\int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi,\eta)\mathrm{d}\eta,$$

满足方程式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y).$$

证 利用含参变量的常义积分的求导公式,有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\int_0^x [f(\xi,x+y-\xi) - (-1)f(\xi,\xi-x+y)]\mathrm{d}\xi$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x-x+y}^{x+y-x} f(x,\eta)\mathrm{d}\eta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^x [f(\xi,x+y-\xi) + f(\xi,\xi-x+y)]\mathrm{d}\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\int_0^x [f'_2(\xi,x+y-\xi) - f'_2(\xi,\xi-x+y)]\mathrm{d}\xi$$
$$+\frac{1}{2}[f(x,x+y-x) + f(x,x-x+y)]$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^x [f'_2(\xi,x+y-\xi) - f'_2(\xi,\xi-x+y)]\mathrm{d}\xi$$
$$+ f(x,y).$$

同理 $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\int_0^x [f(\xi,x+y-\xi) - f(\xi,\xi-x+y)]\mathrm{d}\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\int_0^x [f'_2(\xi,x+y-\xi) - f'_2(\xi,\xi-x+y)]\mathrm{d}\xi,$$

其中 f'_2 表示 $f(u,v)$ 对第二个变量求偏导数,因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y).$$

注：本题还应假设 f'_2 存在且连续.

【3983】 令函数 $f(x,y)$ 的等位线是简单的封闭曲线，而且域 $S(v_1,v_2)$ 由曲线 $f(x,y)=v_1$ 和 $f(x,y)=v_2$ 围成. 证明：

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\mathrm{d}v,$$

其中 $F(v)$ 为由曲线 $f(x,y)=v_1$ 和 $f(x,y)=v_2$ 围成的面积.

提示：把积分域划分成由函数 $f(x,y)$ 的无穷近似水平线围成的若干个子域.

证 作$[v_1,v_2]$的任一分划 T

$$v_1=v'_0<v'_1<\cdots<v'_i<\cdots<v'_n=v_2,$$

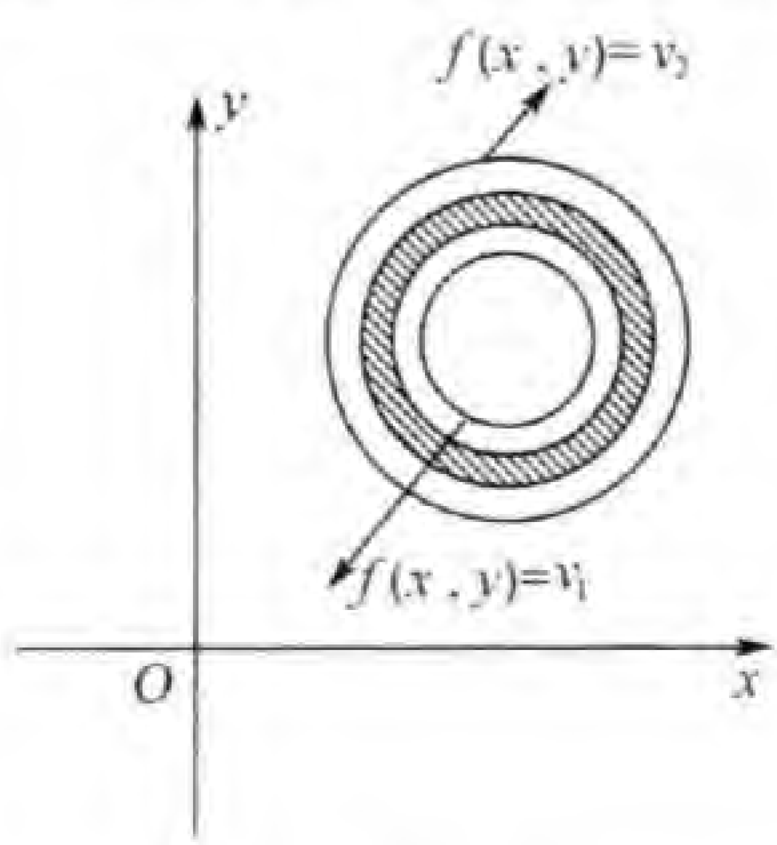
记

$$\mathrm{d}(T)=\max\Delta v'_i,$$
$$\Delta v'_i=v'_i-v'_{i-1}\qquad(i=1,2,\cdots,n),$$

于是，由积分中值定理知

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{S(v'_{i-1},v'_i)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i,$$

其中 ΔS_i 表小环形域$S(v'_{i-1},v'_i)$（如 3983 题图中阴影部分）的面积



3983 题图

$$P_i(x_i,y_i)\in S(v'_{i-1},v'_i)$$

令 $v_i^* = f(x_i,y_i)$.

则 $v'_{i-1}\leqslant v_i^* \leqslant v'_i$,

又利用微分中值定理有

$$\Delta S_i = F(v'_i)-F(v'_{i-1}) = F'(\bar{v}_i)\Delta v'_i(i=1,2,\cdots,n),$$

其中 $v'_{i-1}\leqslant \bar{v}_i \leqslant v'_i$.

这里我们假设了 $F'(v)$ 在$[v_1,v_2]$上存在且可积,于是它有界,即

$$|F'(v)|\leqslant M \qquad (v_1\leqslant v\leqslant v_2),$$

这里 M 是一正常数.因此,我们有

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} v_i^* F'(\bar{v}_i)\Delta v'_i = I_1+I_2, \qquad ①$$

其中 $I_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}\bar{v}_iF'(\bar{v}_i)\Delta v'_i, I_2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(v_i^*-\bar{v}_i)F'(\bar{v}_i)\Delta v'_i$.

由于 $F'(v)$ 在$[v_1,v_2]$上可积,故 $vF'(v)$ 在$[v_1,v_2]$上也可积,因此 $\lim\limits_{d(T)\to 0} I_1 = \lim\limits_{d(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{v}_iF'(\bar{v}_i)\Delta v'_i = \int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\mathrm{d}v$.

另一方面

$$|I_2|\leqslant M\mathrm{d}(T)\sum_{i=1}^{n}\Delta v'_i = M(v_2-v_1)\mathrm{d}(T),$$

故 $\lim\limits_{d(T)\to 0} I_2 = 0$.

在 ① 式两边令 $\mathrm{d}(T)\to 0$ 取极限,得

$$\iint\limits_{D(v_1,v_2)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\mathrm{d}v.$$

注:本题假设了 $f(x,y)$ 在 $S(v_1,v_2)$ 上连续而 $F'(v)$ 在$[v_1,v_2]$上存在并且可积.

§2. 面积的计算

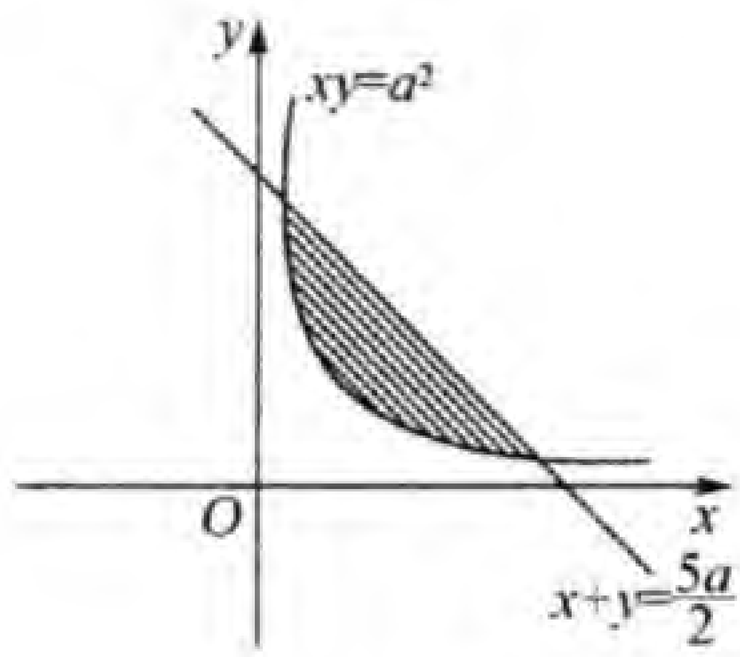
位于 Oxy 平面的域 S 的面积由下公式计算:

$$S = \iint\limits_{S}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

求出由下列曲线围成的面积(3984 ~ 3986).

【3984】 $xy = a^2, x + y = \frac{5}{2}a \quad (a > 0)$.

解 直线与曲线的交点为 $A\left(\frac{a}{2}, 2a\right)$, $B\left(2a, \frac{a}{2}\right)$, 如 3984 题图所示



3984 题图

所求面积为

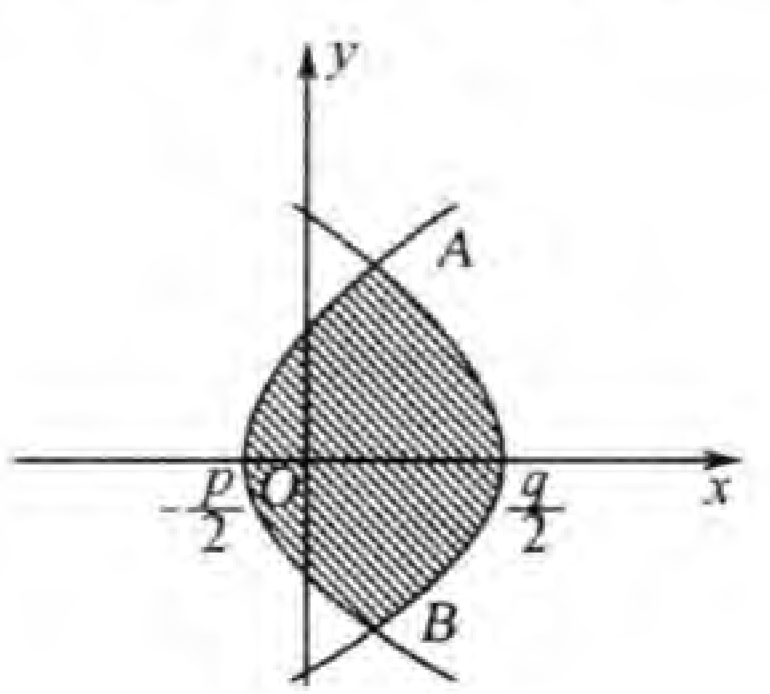
$$S = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} dx \int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5a}{2}-x} dy = \frac{15}{8}a^2 - 2a^2 \ln 2.$$

【3985】 $y^2 = 2px + p^2, y^2 = -2qx + q^2 \quad (p > 0, q > 0)$.

解 解方程组

$$\begin{cases} y^2 = 2px + p^2, \\ y^2 = 2qx + q^2. \end{cases}$$

得两曲线的交点为 $A\left(\frac{q-p}{2}, \sqrt{pq}\right)$, $B\left(\frac{q-p}{2}, -\sqrt{pq}\right)$



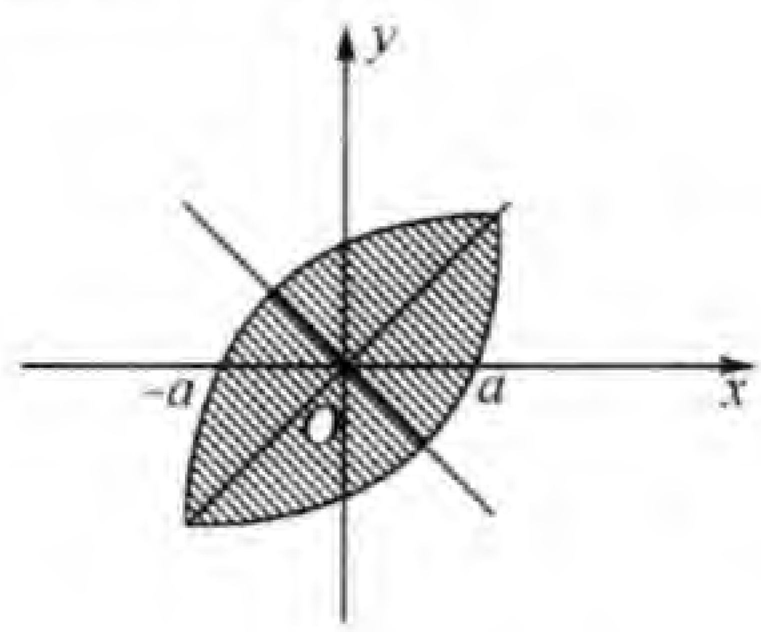
3985 题图

故所求面积为

$$S = 2\int_0^{\sqrt{pq}} \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2-p^2}{2p}}^{\frac{q^2-y^2}{2q}} \mathrm{d}x = \frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}.$$

【3986】 $(x-y)^2 + x^2 = a^2 \qquad (a > 0)$.

解 如 3986 题图所示



3986 题图

所求面积的域为

$$-a \leqslant x \leqslant a,$$

$$x - \sqrt{a^2 - x^2} \leqslant y \leqslant x + \sqrt{a^2 - x^2},$$

故所求面积为

$$S = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}y = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t \mathrm{d}t = \pi a^2.$$

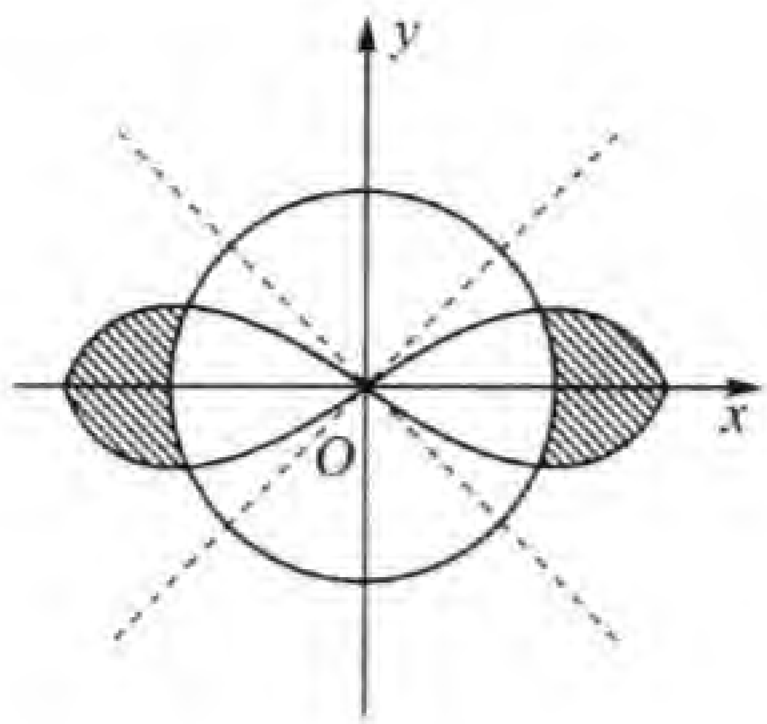
变换为极坐标,计算由下列曲线围成的面积(3987 ~ 3990).

【3987】 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$;$x^2 + y^2 \geqslant a^2$.

解 曲线的极坐标方程为 $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ 及圆 $r = a$,它们在第一象限的交点为 $\left(a, \frac{\pi}{6}\right)$,如 3987 题图所示

由对称性即得,所求面积为

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}\theta \int_a^{\sqrt{2a^2\cos 2\varphi}} r \mathrm{d}r$$



3987 题图

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2a^2\cos 2\varphi - a^2)\mathrm{d}\varphi = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2.$$

【3988】 $(x^3+y^3)^2 = x^2+y^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0.$

解 将所给曲线方程化为极坐标方程得

$$r^2 = \frac{1}{\cos^3\theta+\sin^3\theta} \qquad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

故所求面积为

$$S = \iint_S r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\frac{1}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}}} r\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\mathrm{d}\theta,$$

而
$$\frac{1}{\cos^3\theta+\sin^3\theta} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}+\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}\right),$$

并且
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\tan\frac{\theta+\frac{\pi}{4}}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\tan\frac{3\pi}{8}-\ln\tan\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}-\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}\right] = \sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)}{2\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$= 2\arctan(\sin\theta - \cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

于是,所求面积为

$$S = \frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{6}.$$

【3989】 $(x^2+y^2)^2 = a(x^3-3xy^2) \qquad (a>0).$

解 显然曲线关于 Ox 轴对称,故只要求出 $y \geqslant 0$ 的部分.将方程化为极坐标得

$$r = a\cos\theta(4\cos^2\alpha - 3).$$

由于必须 $x^3 - 3xy^2 \geqslant 0$,

故 $\qquad \cos\theta(4\cos^2\theta - 3) \geqslant 0,$

故有 $\cos\theta \geqslant 0$ 且 $\cos\theta \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\cos\theta \leqslant 0$ 且 $\cos\theta \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$,解之得

$$-\frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi - \frac{\pi}{6},$$

$$-\pi + \frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant -\frac{\pi}{2}.$$

在 Ox 轴上方的部分为

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6} \text{ 及} \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi - \frac{\pi}{6}.$$

由对称性可得

$$S = 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^{a\cos\theta(4\cos^3\theta-3)} r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} d\theta \int_0^{a\cos\theta(4\cos^2\theta-3)} r dr\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta - 3)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta - 3)^2 d\theta.$$

而令 $\qquad \theta = \pi - \varphi,$

有 $\qquad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2 d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\varphi(4\cos^3\varphi-3)^2 d\varphi,$

故 $\qquad S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2 d\theta$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(16\cos^6\theta - 24\cos^4\theta + 9\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= a^2\left(16\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 24\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}.$$

【3990】 $(x^2+y^2)^2 = 8a^2xy$；

$(x-a)^2+(y-a)^2 \leqslant a^2 \qquad (a>0)$.

解 将方程化为极坐标方程得

$$r^2 = 8a^2\cos\theta\sin\theta \qquad (\text{双纽线})$$

即 $\quad r = 2a\sqrt{\sin 2\theta}$，

及圆周 $\quad (r\cos\theta - a)^2 + (r\sin\theta - a)^2 = a^2$，

即 $\quad r = a(\cos\theta + \sin\theta) \pm a\sqrt{\sin 2\theta}$.

显然，两曲线关于射线 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 对称，令

$$2a\sqrt{\sin 2\theta} = a(\sin\theta + \cos\theta) - a\sqrt{\sin 2\theta},$$

得一个交点的极角$\left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$，

$$\theta = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8},$$

于是由对称性知，所求面积为

$$S = \iint\limits_S r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_{\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\left[(2a\sqrt{\sin 2\theta})^2 - a(\cos\theta + \sin\theta)\right.$$

$$\left.- a\sqrt{\sin 2\theta}\right]^2\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\left[2a^2\sin 2\theta + 2a^2(\sin\theta + \cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta} - a^2\right]\mathrm{d}\theta.$$

利用 $\sqrt{\sin 2\theta}\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\sqrt{\tan\theta}$，

$$\sqrt{\sin 2\theta}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\sqrt{\cot\theta},$$

并令 $\tan\theta = t$，及利用有理函数积分可得

$$\int(\sin\theta+\cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\theta-\cos\theta)\sqrt{2\sin\theta}+\frac{1}{2}\arcsin(\sin\theta-\cos\theta)+C,$$

所以 $$S = a^2\left[-\cos 2\theta+(\sin\theta-\cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta}\right.$$

$$\left.+\arcsin(\sin\theta-\cos\theta)-\theta\right]\Big|_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=a^2\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt{7}}{8}+\frac{\sqrt{14}}{4}\sqrt{\frac{1}{8}}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}\right]$$

$$=a^2\left[\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{8}\right)\right]$$

$$=a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$$

$$=a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}\right),$$

最后一步利用了

$$\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)=\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

根据广义极坐标公式：

$$\boldsymbol{x = ar\cos^{\alpha}\varphi,\ y = br\sin^{\alpha}\varphi \qquad (r \geqslant 0),}$$

其中 a,b,α 为以适当的确定的常数，及且

$$\boldsymbol{\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi.}$$

由此求出受下列曲线（参数是正数）限制的面积(3991 ~ 3994).

【3991】 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}.$

解 令

$$x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi,$$

则曲线方程化为

$$r = \frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi,$$

因此，首先必须

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

若 $\cos\varphi \geqslant 0$，则 $\tan\varphi \geqslant -\frac{ak}{bh}$；

若 $\cos\varphi \leqslant 0$，则 $\tan\varphi \leqslant -\frac{ak}{bh}$.

从而 φ 应满足不等式

$$-\operatorname{arcot}\frac{ak}{bh} \leqslant \varphi \leqslant \pi - \operatorname{arcot}\frac{ak}{bh}.$$

于是，曲线所围的面积为

$$S = \iint_S abr\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{ab}{2}\int_{-\arctan\frac{ak}{bh}}^{\pi-\arctan\frac{ak}{bh}} \left(\frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi\right)^2 \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)\int_{-\arctan\frac{ak}{bh}}^{\pi-\arctan\frac{ak}{bh}} \sin^2(\varphi + \varphi_0)\mathrm{d}\varphi,$$

其中 $\varphi_0 = \arctan\frac{ak}{bh}$.

从而 $S = \frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)\left[\frac{\varphi + \varphi_0}{2} - \frac{1}{4}\sin 2(\varphi + \varphi_0)\right]\Bigg|_{-\varphi_0}^{\pi-\varphi_0}$

$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{ab\pi}{4}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right).$$

【3992】 $\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$；$x = 0, y = 0$.

解 令 $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi$.

则曲线方程化为

$$r = \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}.$$

于是,曲线所界的面积为

$$S=\iint\limits_{S}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{r_1}abr\mathrm{d}r=\frac{ab}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}r_1^2\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4\cos^4\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^4\sin^4\varphi+2\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi,$$

其中 $$r_1=\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}.$$

由 1892 题的结果有

$$\int\frac{\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}=\int\frac{1}{(1+\tan^3\varphi)}\mathrm{d}(\tan\varphi)$$

$$=\frac{\tan\varphi}{3(\tan^3\varphi+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(\tan\varphi+1)^2}{\tan^2\varphi-\tan\varphi+1}$$

$$+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\varphi-1}{\sqrt{3}}+C,$$

从而 $$\frac{ab}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^4\left\{\frac{\tan\varphi}{3(\tan^3\varphi+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(\tan\varphi+1)^2}{\tan^2\varphi-\tan\varphi+1}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\varphi-1}{\sqrt{3}}\right\}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^4\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{a}{h}\right)^4.$$

又利用分部积分公式可得

$$\int\frac{\sin^4\varphi\mathrm{d}\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}=\int\frac{\tan^4\varphi}{(1+\tan^3\varphi)^2}\mathrm{d}(\tan\varphi)$$

$$=-\frac{1}{3}\int\tan^2\varphi\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+\tan^3\varphi}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\frac{\tan^2\varphi}{1+\tan^3\varphi}+\frac{2}{3}\int\frac{\tan\varphi}{1+\tan^3\varphi}\mathrm{d}(\tan\varphi).$$

利用待定系数法,可算得

$$\int \frac{\tan\varphi}{1+\tan^3\varphi} d(\tan\varphi)$$

$$= \frac{1}{6}\ln \frac{\tan^2\varphi - \tan\varphi + 1}{(\tan\varphi+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2\tan\varphi - 1}{\sqrt{3}} + C,$$

故
$$\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{b}{k}\right)^4 \sin^4\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2} d\varphi$$

$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^4 \left\{-\frac{1}{3}\frac{\tan^2\varphi}{1+\tan^3\varphi} + \frac{1}{9}\ln\frac{\tan^2\varphi-\tan\varphi+1}{(\tan\varphi+1)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\varphi-1}{\sqrt{3}}\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^4 \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{b}{k}\right)^4,$$

而
$$\int \frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2} = \int \frac{\tan^2\varphi}{(1+\tan^3\varphi)} d(\tan\varphi)$$

$$= -\frac{1}{3(1+\tan^3\varphi)} + C,$$

所以
$$\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2 \cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)} d\varphi$$

$$= ab\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2\left[-\frac{1}{3(1+\tan^3\varphi)}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$= \frac{ab}{3}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2,$$

因此
$$S = \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{a}{h}\right)^4 + \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{b}{k}\right)^4 + \frac{ab}{3}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2$$

$$= \frac{ab}{3}\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right) + \frac{a^2b^2}{h^2k^2}\right].$$

【3993】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2} \quad (x>0, y>0).$

解 令 $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi.$

则曲线方程化为

$$r^2=\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}\qquad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是,所求面积为

$$S=\iint\limits_S abr\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{a}{k}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}\mathrm{d}\varphi,$$

而
$$\int\frac{\cos^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}\mathrm{d}\varphi=\int\frac{1}{(1+\tan\varphi)^4}\mathrm{d}(\tan\varphi)$$
$$=-\frac{1}{3}\frac{1}{(1+\tan\varphi)^3}+C,$$

$$\int\frac{\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}\mathrm{d}\varphi=\int\frac{\tan^2\varphi}{(1+\tan\varphi)^4}\mathrm{d}(\tan\varphi)$$
$$=\int\frac{(\tan\varphi-1)(\tan\varphi+1)+1}{(1+\tan\varphi)^4}\mathrm{d}(\tan\varphi)$$
$$=\int\frac{1}{(1+\tan\varphi)^2}\mathrm{d}(\tan\varphi)-2\int\frac{\mathrm{d}(\tan\varphi)}{(1+\tan\varphi)^3}+\int\frac{\mathrm{d}(\tan\varphi)}{(1+\tan\varphi)^4}$$
$$=-\frac{1}{1+\tan\varphi}+\frac{1}{(1+\tan\varphi)^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{(1+\tan\varphi)^3}+C,$$

因此,所求面积为

$$S=\frac{ab}{2}\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^2\left[-\frac{1}{3(1+\tan\varphi)^3}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$
$$+\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^2\left[-\frac{1}{1+\tan\varphi}+\frac{1}{(1+\tan\varphi)^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{(1+\tan\varphi)^3}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$
$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

注:也可设

$$x=hr\cos\varphi,y=kr\sin\varphi.$$

【3994】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}\qquad(x>0,y>0).$

解 令

$$x=ar\cos\varphi,y=ar\sin\varphi.$$

则曲线方程化为

$$r^2=\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos\varphi-\left(\frac{b}{k}\right)\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}.$$

由于$\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi-\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi\geqslant 0$，

则 $$\tan^2\varphi\leqslant\left(\frac{ak}{bh}\right)^2,$$

且 $$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

故 $$0\leqslant\varphi\leqslant\arctan\frac{ak}{bh}.$$

利用上题中的两个不定积分，可得所求面积为

$$\begin{aligned}S&=\iint_S abr\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\frac{ab}{2}\int_0^{\arctan\frac{ak}{bh}}\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi-\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+\tan\varphi)^3}\right]\Bigg|_0^{\arctan\frac{ak}{bh}}\\&\quad-\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^2\left[-\frac{1}{1+\tan\varphi}+\frac{1}{(1+\tan\varphi)^2}\right.\\&\quad\left.-\frac{1}{3(1+\tan\varphi)^3}\right]\Bigg|_0^{\arctan\frac{ak}{bh}}\\&=\frac{ab}{6}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{ak}{bh}\right)^3}\right]\\&\quad+\frac{ab}{6}\left(\frac{b}{k}\right)^2\left[\frac{3\left(\frac{ak}{bh}\right)^2+3\left(\frac{ak}{bh}\right)+1}{\left(1+\frac{ak}{bh}\right)^3}-1\right]\\&=\frac{a^4bk(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2}.\end{aligned}$$

【3994.1】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5=\frac{x^2y^2}{c^4}.$

解 令 $x=ar\cos^2\varphi, y=br\sin^2\varphi.$

则方程变为

$$r=\frac{a^2b^2}{c^4}\cos^4\varphi\cdot\sin^4\varphi\qquad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

$$|I|=2abr\cos\varphi\sin\varphi.$$

所求面积为

$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_{S}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a^2b^2}{c^4}\cos^4\varphi\sin^4\varphi}2abr\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}r\\&=\frac{a^5b^5}{c^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9\varphi\cos^9\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{a^5b^5}{c^4}\,\frac{1}{2^9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 2\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{a^5b^5}{c^4}\cdot\frac{1}{2^{10}}\int_0^{\pi}\sin^9\theta\mathrm{d}\theta=\frac{a^5b^5}{c^4}\cdot\frac{1}{2^9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9\theta\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

利用2281题结论可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9\theta\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3},$$

因此

$$S=\frac{a^5b^5}{c^4}\cdot\frac{1}{2^9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{a^5b^5}{1260c^4}.$$

【3995】 $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1;x=0,y=0.$

解 令 $x=ar\cos^8\varphi,y=ar\sin^8\varphi.$

则曲线方程化为

$$r=1\qquad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是,所求面积为

$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_{S}8abr\cos^7\varphi\sin^7\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin^7\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=4ab\int_0^1u^7(1-u^2)^3\mathrm{d}u\\&=4ab\int_0^1(u^7-3u^9+3u^{11}-u^{13})\mathrm{d}u\\&=4ab\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{10}+\frac{3}{12}-\frac{1}{14}\right)=\frac{ab}{70}.\end{aligned}$$

进行适当的变量代换，求出由下列曲线围成的图形面积（3996 ~ 4007）.

【3996】 $x+y=a, x+y=b, y=\alpha x, y=\beta x$

$(0<a<b;0<\alpha<\beta)$.

解 设 $x+y=u, \dfrac{y}{x}=v$,

则积分域变为

$$\sum: a\leqslant u\leqslant b, \alpha\leqslant v\leqslant\beta,$$

且 $$|I|=\frac{u}{(1+v)^2},$$

所以，所求面积为

$$S=\iint\limits_{\sum}\frac{u}{(1+v)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_a^b u\,\mathrm{d}u\int_\alpha^\beta\frac{\mathrm{d}v}{(1+v)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(b^2-a^2)(\beta-\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)}.$$

【3997】 $xy=a^2, xy=2a^2, y=x, y=2x$

$(x>0;y>0)$.

解 作变换

$$xy=u, \frac{y}{x}=v$$

则积分域变为

$$\sum: a^2\leqslant u\leqslant 2a^2, 1\leqslant v\leqslant 2,$$

且有 $$|I|=\left|\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2v}.$$

于是，所求面积为

$$S=\iint\limits_{\sum}\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{a^2}^{2a^2}\mathrm{d}u\int_1^2\frac{1}{2v}\mathrm{d}v=\frac{1}{2}a^2\ln 2.$$

【3998】 $y^2=2px, y^2=2qx, x^2=2ry, x^2=2sy$

$(0<p<q;0<r<s)$.

解 作变换

$$\frac{y^2}{x}=u,\frac{x^2}{y}=v.$$

则积分域变为

$$\sum:2p\leqslant u\leqslant 2q,2r\leqslant v\leqslant 2s,$$

且 $$|I|=\frac{1}{3},$$

于是,所求面积为

$$S=\iint\limits_{\sum}\frac{1}{3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_{2p}^{2q}\mathrm{d}u\int_{2r}^{2s}\mathrm{d}v=\frac{4}{3}(q-p)(s-r).$$

【3998.1】 $x^2=ay,x^2=by,x^3=cy^2,x^3=dy^2$

$(0<a<b;0<c<d)$.

解 作变换

$$u=\frac{x^2}{y},v=\frac{x^3}{y^2}.$$

则变换将积分域变为

$$\sum:a\leqslant u\leqslant b,c\leqslant v\leqslant \mathrm{d},$$

且 $$x=\frac{u^2}{v},v=\frac{u^3}{v^2}.$$

则 $$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v},\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=-\frac{u^4}{v^4},$$

从而 $$|I|=\frac{u^4}{v^4},$$

因此,所求面积为

$$S=\iint\limits_{\sum}\frac{u^4}{v^4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_a^b u^4\mathrm{d}u\int_c^{\mathrm{d}}\frac{\mathrm{d}v}{v^4}=\frac{1}{15}(b^5-a^5)\left(\frac{1}{c^3}-\frac{1}{\mathrm{d}^3}\right).$$

【3998.2】 $y=ax^p,y=bx^p,y=cx^q,y=dx^q$

$(0<p<q;0<a<b;0<c<d)$.

解　作变换

$$u=\frac{y}{x^{p}},v=\frac{y}{x^{q}}.$$

则积分域变为

$$\sum:a\leqslant u\leqslant b,c\leqslant v\leqslant \mathrm{d},$$

且　$$|I|=\frac{1}{q-p}\cdot\frac{u^{\frac{p+1}{q-p}}}{v^{\frac{q+1}{q-p}}}.$$

故所求面积为

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{q-p}\int_a^b u^{\frac{p+1}{q-p}}\mathrm{d}u\int_c^{\mathrm{d}}\frac{1}{v^{\frac{q+1}{q-p}}}\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{q-p}\cdot\left(\frac{q-p}{q+1}u^{\frac{q+1}{q-p}}\Big|_a^b\right)\cdot\left(\frac{q-p}{-(p+1)}v^{-\frac{p+1}{q-p}}\Big|_c^{\mathrm{d}}\right)\\&=\frac{q-p}{(q+1)(p+1)}\left(b^{\frac{q+1}{q-p}}-a^{\frac{q+1}{q-1}}\right)\left(\frac{1}{c^{\frac{p+1}{q-p}}}-\frac{1}{\mathrm{d}^{\frac{p+1}{q-p}}}\right).\end{aligned}$$

【3999】　$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1,\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2$

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b},4\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$　　$(a>0,b>0)$.

解　作变换

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=u,\frac{x}{y}=v,$$

即　$$x=\frac{u^2v}{\left[\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right]^2},y=\frac{u^2}{\left[\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right]^2}.$$

则变换将积分域变为

$$1\leqslant u\leqslant 2,\frac{a}{4b}\leqslant v\leqslant\frac{a}{b}.$$

且　$$|I|=\frac{2u^3}{\left[\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right]^4}.$$

于是所求面积为

$$S=\int_1^2 2u^3\,\mathrm{d}u\int_{\frac{a}{4b}}^{\frac{a}{b}}\frac{\mathrm{d}v}{\left[\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right]^4}\qquad(\text{令 } v=at^2)$$

$$=\frac{15}{2}\int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\frac{2at}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}\mathrm{d}t$$

$$=15a\int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\left[\frac{1}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^3}-\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}\right]\mathrm{d}t$$

$$=15a\left(\frac{7b}{72}-\frac{37b}{648}\right)$$

$$=\frac{65ab}{108}.$$

【3999.1】 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1,\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=4$

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b},8\,\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\qquad(x>0,y>0).$

解 令

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=u,\frac{x}{y}=v,$$

则
$$x=\frac{u^{\frac{3}{2}}v}{\left[\left(\frac{v}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$y=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\left[\left(\frac{v}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

变换将积分域变

$$\sum:1\leqslant u\leqslant 4,\frac{a}{8b}\leqslant v\leqslant\frac{a}{b}.$$

且
$$|I|=\frac{3}{2}\frac{u^2}{\left[\left(\frac{v}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3},$$

因此,所求面积为

$$S=\frac{3}{2}\int_1^4 u^2\mathrm{d}u\int_{\frac{a}{8b}}^{\frac{a}{b}}\frac{\mathrm{d}v}{\left[\left(\frac{v}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3}\quad\left(令\left(\frac{v}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=t\right)$$

$$=\frac{63}{2}\int_{\frac{1}{2\sqrt[3]{b}}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{b}}}\frac{3at^2\mathrm{d}t}{\left[t^2+\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3}$$

$$=\frac{63}{2}\times 3a^2\left[\int_{\frac{1}{2\sqrt[3]{b}}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{b}}}\frac{\mathrm{d}t}{\left[t^2+\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^2}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\int_{\frac{1}{2\sqrt[3]{b}}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{b}}}\frac{\mathrm{d}t}{\left[t^2+\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3}\right].$$

【4000】 $\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$,其中 λ 取以下数值:

$$\frac{1}{3}c^2,\frac{2}{3}c^2,\frac{4}{3}c^2,\frac{5}{3}c^2\qquad(x>0,y>0).$$

解 将方程

$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1,$$

变为 $\lambda^2-(x^2+y^2+c^2)\lambda+c^2x^2=0$,

将 λ 作为未知数解方程,不妨记方程的两个解为 λ,μ,则

$$\lambda=\frac{x^2+y^2+c^2+\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}}{2},$$

$$\mu=\frac{x^2+y^2+c^2-\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}}{2},$$

按上式变作变量代换,将 (x,y) 变为 (λ,μ),则

$$\left|\frac{D(\lambda,\mu)}{D(x,y)}\right|=\frac{4c^2xy}{\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}}$$

$$=\frac{4\sqrt{\lambda\mu(c^2-\mu)(\lambda-c)}}{\lambda-\mu},$$

所以 $\left|\frac{D(x,y)}{D(\lambda,\mu)}\right| = \frac{1}{\left|\frac{D(\lambda,\mu)}{D(x,y)}\right|} = \frac{\lambda-\mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2-\mu)(\lambda-c^2)}}$,

因此,所求面积为

$$S = \iint\limits_{\Omega} dxdy$$
$$= \iint\limits_{\substack{\frac{4c^2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\frac{5c^2}{3}\\ \frac{c^2}{3}\leqslant u\leqslant\frac{2c^2}{3}}} \frac{\lambda-\mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2-u)(\lambda-c^2)}}d\mu d\lambda$$
$$= \frac{c^2}{4}\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{u-v}{\sqrt{uv(1-v)(u-1)}}dudv$$
$$= \frac{c^2}{4}\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{\sqrt{u}du}{\sqrt{u-1}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{v}dv}{\sqrt{1-v}} - \frac{c^2}{4}\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{du}{\sqrt{u(u-1)}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{v}dv}{\sqrt{1-v}}.$$

由于$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{\sqrt{u}du}{\sqrt{u-1}} = \frac{\sqrt{10}}{3} - \frac{2}{3} + \ln\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$,

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{du}{\sqrt{u(u-1)}} = 2\ln\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}},$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{v}dv}{\sqrt{1-v}} = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

因此 $S = \frac{c^2}{6}(\sqrt{10}-2)\left[\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$

$$= \frac{c^2}{6}(\sqrt{10}-2)\arcsin\frac{1}{3}.$$

【4001】 求由椭圆

$$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$$

围成的面积,这里

$$\delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

解 作变换

$$u=a_1x+b_1y+c_1, v=a_2x+b_2y+c_2.$$

则椭圆所围的域变为

$$u^2+v^2\leqslant 1,$$

且 $$|I|=\frac{1}{|\delta|}=\frac{1}{|a_1b_2-a_2b_1|},$$

因此，所求面积为

$$S=\frac{1}{|\delta|}=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{\pi}{|\delta|}.$$

【4002】 求由椭圆

$$\frac{x^2}{\mathrm{ch}^2u}+\frac{y^2}{\mathrm{sh}^2u}=c^2(u=u_1,u_2)$$

和双曲线

$$\frac{x^2}{\cos^2v}-\frac{y^2}{\sin^2v}=c^2(v=v_1,v_2)$$

$$(0<u_1<u_2;0<v_1<v_2;x>0,y>0)$$

围成的面积.

提示：设 $x=c\mathrm{ch}u\cos v, y=c\mathrm{sh}u\sin v$.

解 作变换

$$x=c\mathrm{ch}u\cdot\cos v, y=c\mathrm{sh}u\cdot\sin v$$

则有 $$|I|=|c^2\mathrm{ch}^2u-c^2\cos^2v|.$$

变换将积分域变为：

$$u_1\leqslant u\leqslant u_2, v_1\leqslant v\leqslant v_2,$$

又 $$\mathrm{ch}^2u\geqslant 1\geqslant\cos^2v,$$

故所求面积为

$$\begin{aligned}S&=c^2\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}(\mathrm{ch}^2u-\cos^2v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=c^2(v_2-v_1)\int_{u_1}^{u_2}\frac{1+\mathrm{ch}2u}{2}\mathrm{d}u\\&\quad-c^2(u_2-u_1)\int_{v_1}^{v_2}\frac{1+\cos2v}{2}\mathrm{d}v\\&=\frac{c^2}{4}[(v_2-v_1)(\mathrm{sh}2u_2-\mathrm{sh}2u_1)\end{aligned}$$

$$-(u_2-u_1)(\sin 2v_2-\sin 2v_1)].$$

【4003】 求用平面

$$x+y+z=0,$$

与曲面 $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$,

相交所得的断面面积.

解 作下面的变量代换

$$x'=\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}z, y'=\frac{1}{\sqrt{6}}x-\frac{2}{\sqrt{6}}y+\frac{1}{\sqrt{6}}z,$$

$$z'=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z.$$

这是一个正交变换,故 $Ox'y'z'$ 成为一新的直角坐标系,在新的直角坐标系下,平面方程为 $z'=0$,由于

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z', y=-\frac{\sqrt{6}}{3}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z',$$

$$z=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'.$$

将上面三式代入曲面方程得

$$x'^2+y'^2=\frac{2}{3}a^2,$$

截面为平面 $z'=0$ 上的圆域

$$x'^2+y'^2\leqslant\frac{2}{3}a^2,$$

故,所求面积为

$$S=\iint\limits_{x'^2+y'^2\leqslant\frac{2a^2}{3}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=\frac{2\pi a^2}{3}.$$

【4004】 求用平面

$$z=1-2(x+y),$$

与曲面 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$,

相交所得的断面面积.

解 平面被曲面所截部分记为 S,它在 xOy 平面上的投影记

为 D. 它们的面积分别也记为 S 和 D. 由于平面 $z=1-2(x+y)$ 的法线之方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos\beta=\frac{2}{3},\cos\gamma=\frac{1}{3}.$$

故 $$D=S\cos\gamma=\frac{1}{3}S,$$

从而 $$S=3D,$$

而曲线 $$\begin{cases} z=1-2(x+y), \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0 \end{cases}$$

在 xOy 平面上的投影曲线为

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{1-2(x+y)}=0,$$

即 $$2x^2+2y^2+3xy-x-y=0.$$

区域 D 就是由它所围之域. 作变换替换

$$x=u+v+\frac{1}{7},y=u-v+\frac{1}{7}.$$

则 $$|I|=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=2,$$

且曲线方程

$$2x^2+2y^2+3xy-x-y=0,$$

变为 $$7u^2+v^2-\frac{1}{7}=0.$$

这是一个椭圆. 从而

$$\begin{aligned} D&=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{49u^2+7v^2\leqslant 1} 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &=2\cdot\pi\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}} \\ &=\frac{2\pi}{7\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

因此 $$S=3D=\frac{6\pi}{7\sqrt{7}}.$$

§3. 体积的计算

柱体上顶是连续曲面 $z = f(x,y) \geqslant 0$,下底是平面 $z = 0$,而侧面是从平面 Oxy 中的可求积区域 Ω(图 14)的垂直柱面,这种柱体的体积等于:

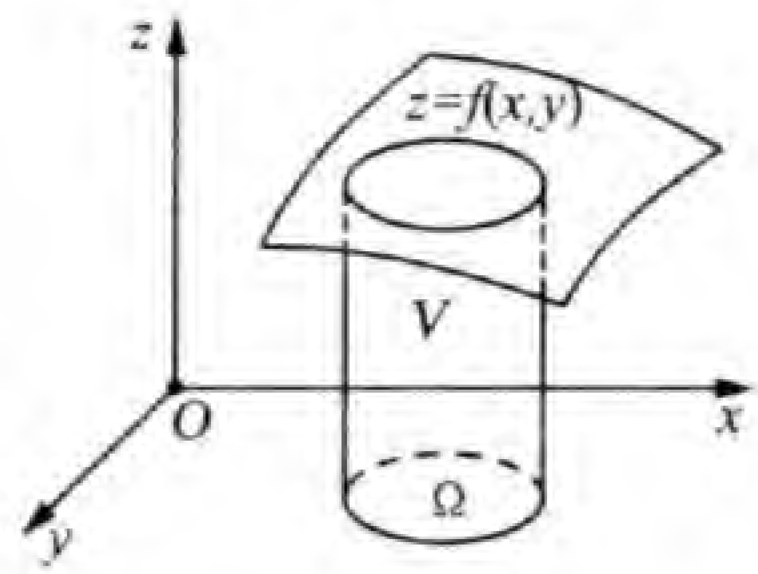


图 14

$$V = \iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

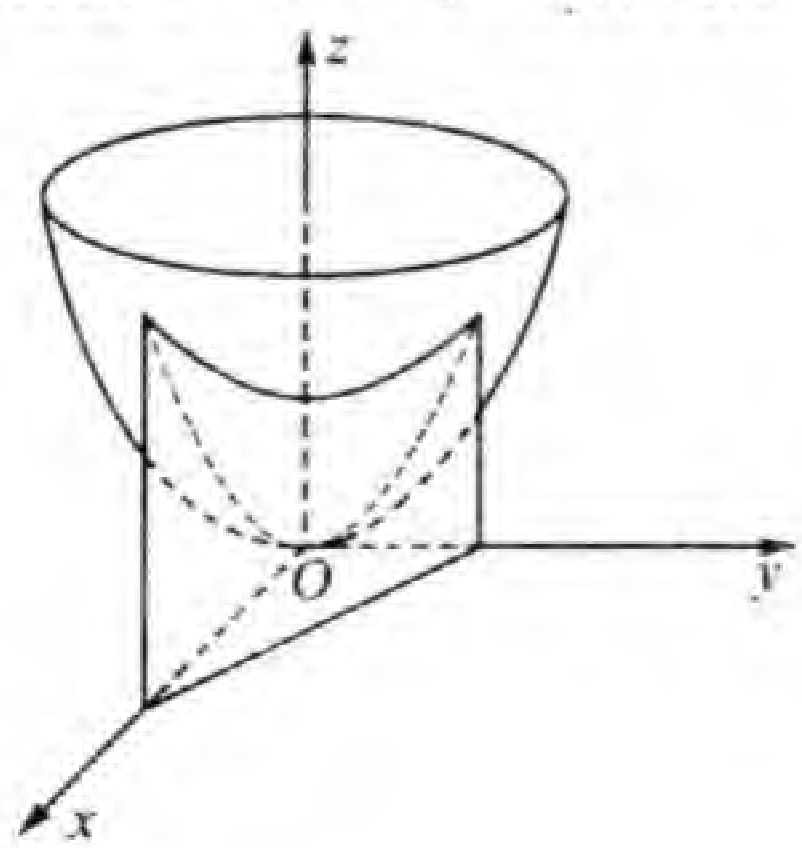
【4005】 画出一立体,其体积等于积分:

$$V = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (x^2 + y^2)\mathrm{d}y.$$

解 积分域为三角形

$$0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - x.$$

柱体上顶为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 物体的形状如 4005 题图所示



4005 题图

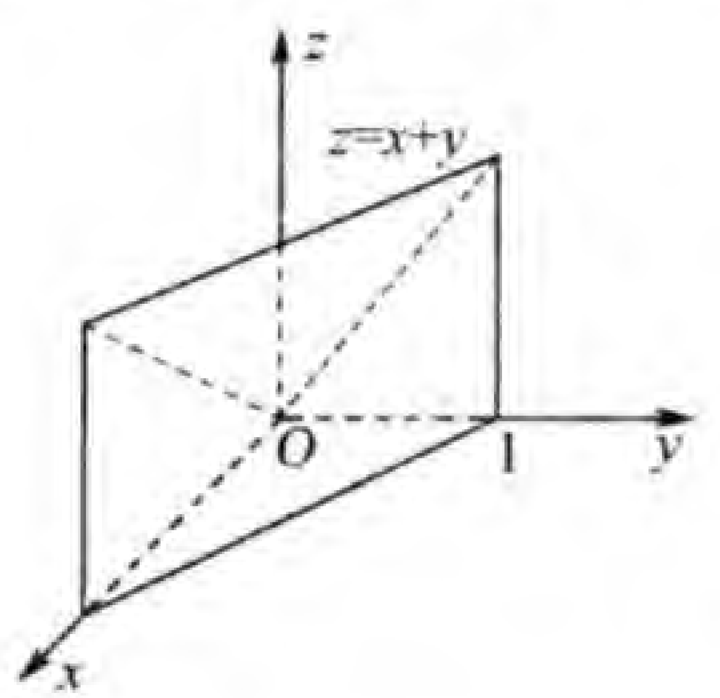
【4006】 描绘出以下二重积分表示的体积的形状：

(1) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$； (2) $\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(3) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；(4) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

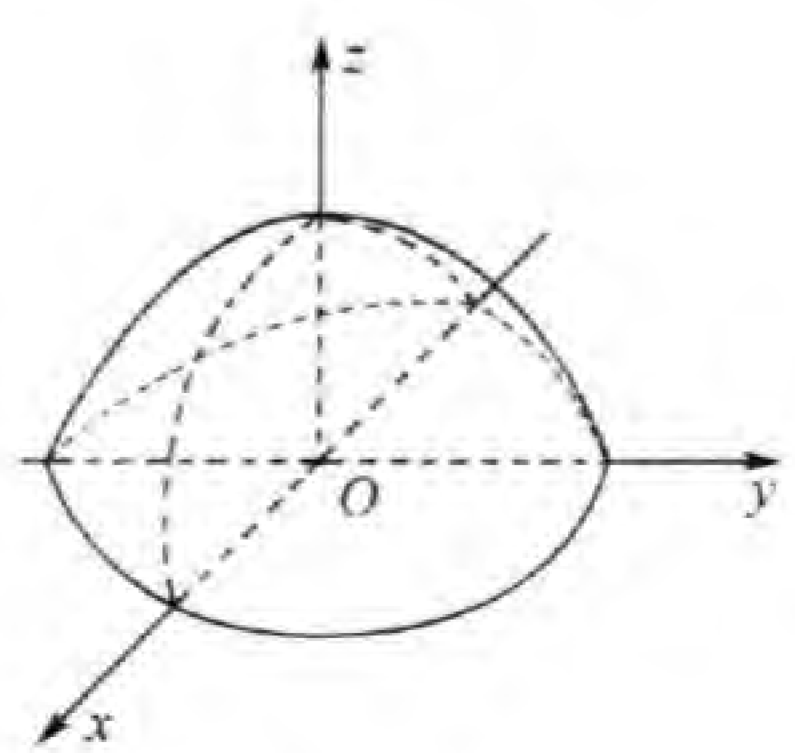
(5) $\iint\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\leqslant 2x}}\sqrt{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$； (6) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sin\pi\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 (1) 由平面 $z=x+y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ 及 $x+y=1$ 所围立体的体积. 如 4006 题图 1 所示



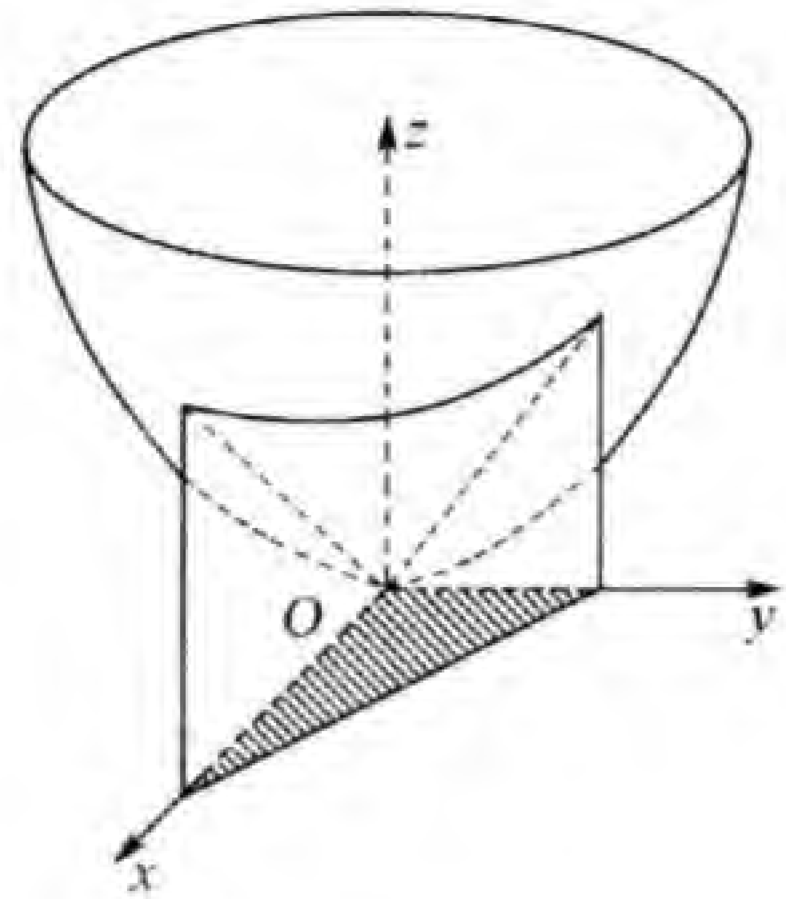
4006 题图 1

(2) 这是上半椭球 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1(z\geqslant 0)$ 的体积，如 4006 题图 2 所示



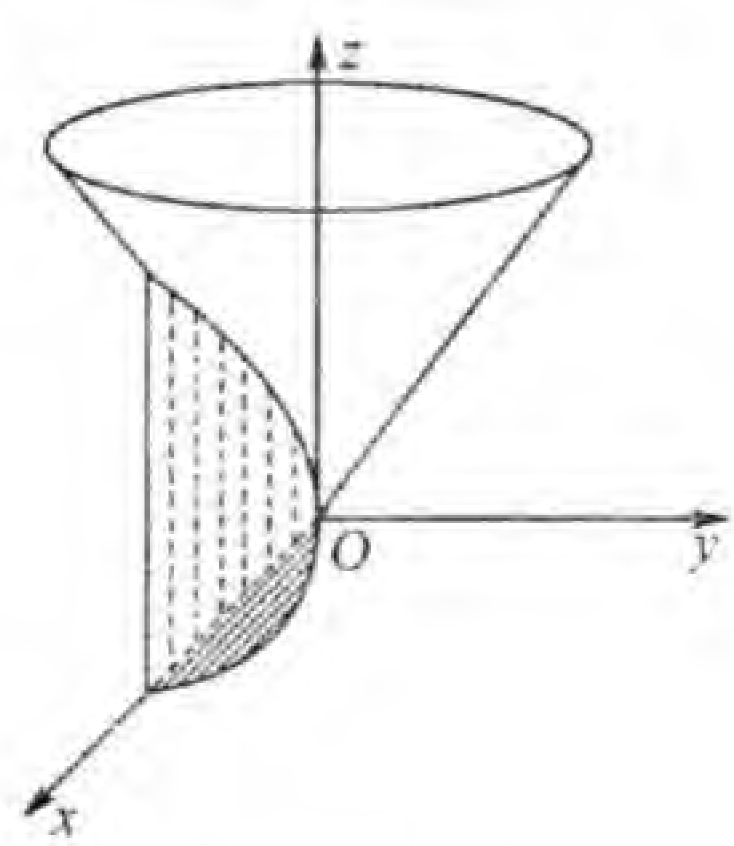
4006 题图 2

(3) 这是由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$,平面 $x+y=1,x+y=-1,x-y=1,x-y=-1$ 及 $z=0$ 所围立体的体积. 如 4006 题图 3 所示(仅画出第一卦限的部分)



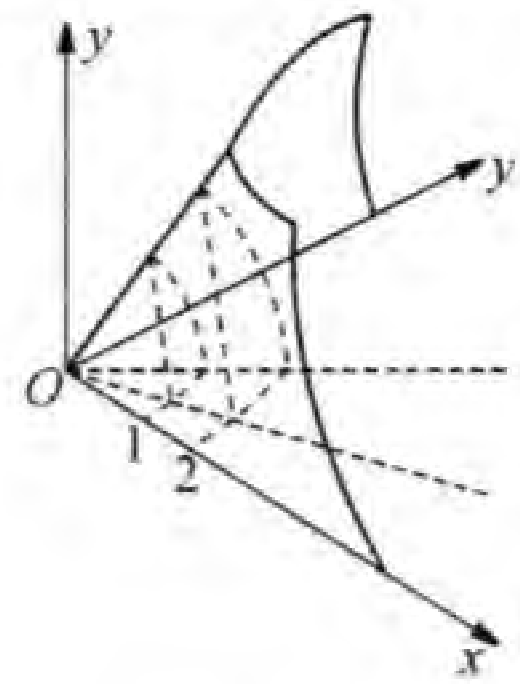
4006 题图 3

(4) 由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$,圆柱面 $x^2+y^2=x$ 及平面 $z=0$ 所围立体的体积. 如 4006 题图 4 所示



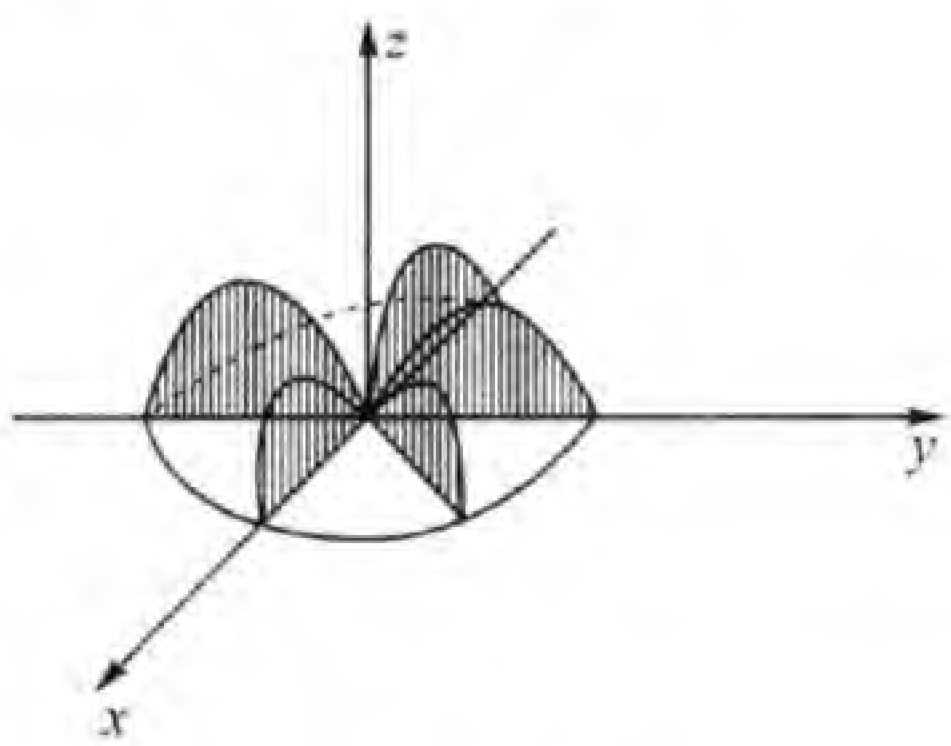
4006 题图 4

(5) 由双曲抛物面 $z=\sqrt{xy}$,平面 $y=x,y=2x,x=1,x=2$ 及 $z=0$ 所围立体的体积,如 4006 题图 5 所示



4006 题图 5

(6) 由正弦旋转曲面 $z=\sin\pi\sqrt{x^2+y^2}$(一拱)及平面 $z=0$ 所围立体的体积. 如 4006 题图 6 所示



4006 题图 6

求出由以下曲面围成的立体体积(4007 ~ 4012).

【4007】 $z=1+x+y, z=0, x+y=1, x=0, y=0$.

解 $V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1+x+y)dy$

$$=\int_0^1\left(\frac{3}{2}-x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\frac{5}{6}.$$

【4008】 $x+y+z=a, x^2+y^2=R^2, x=0, y=0, z=0$

$(a\geqslant R\sqrt{2})$.

解 $V=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}(a-x-y)dy$

$$=\int_0^R\left[(a-x)\sqrt{R^2-x^2}-\frac{R^2-x^2}{2}\right]dx$$

$$=\int_0^R a\sqrt{R^2-x^2}dx-\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}dx-\int_0^R\frac{R^2-x^2}{2}dx$$

$$=\frac{\pi aR^2}{4}-\frac{R^3}{3}-\frac{R^3}{3}=\frac{\pi aR^2}{4}-\frac{2R^3}{3}.$$

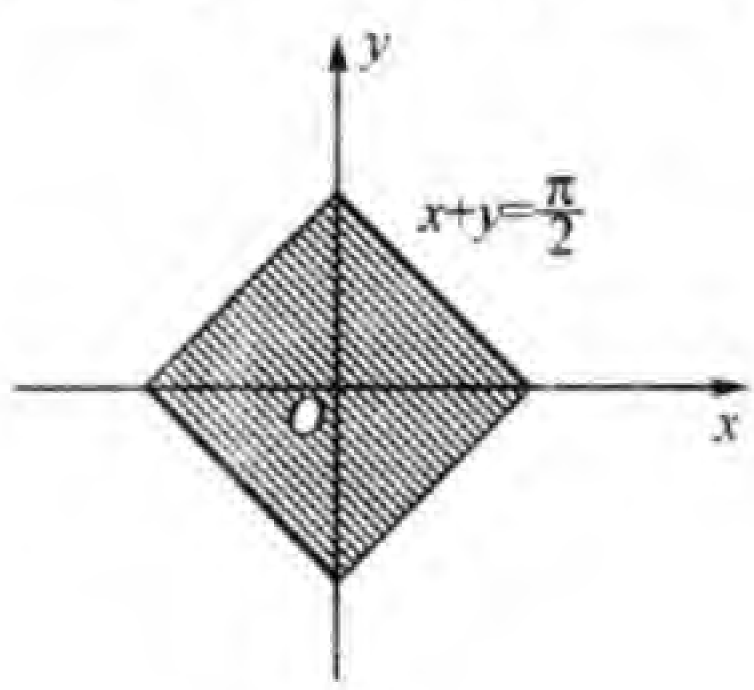
【4009】 $z=x^2+y^2, y=x^2, y=1, z=0.$

解 $V=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1(x^2+y^2)dy=\frac{88}{105}.$

【4010】 $z=\cos x\cos y, z=0, z=\cos x\cos y$

$$|x+y|\leqslant\frac{\pi}{2}, |x-y|\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

解 因函数 $z=\cos x\cos y$ 的图形关 Oyz 平面及 Oxz 平面对称,而积分区域关 Ox 及 Oy 轴对称,如 4010 题图所示



4010 题图

故所求体积为

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos x\cos y dy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx$$

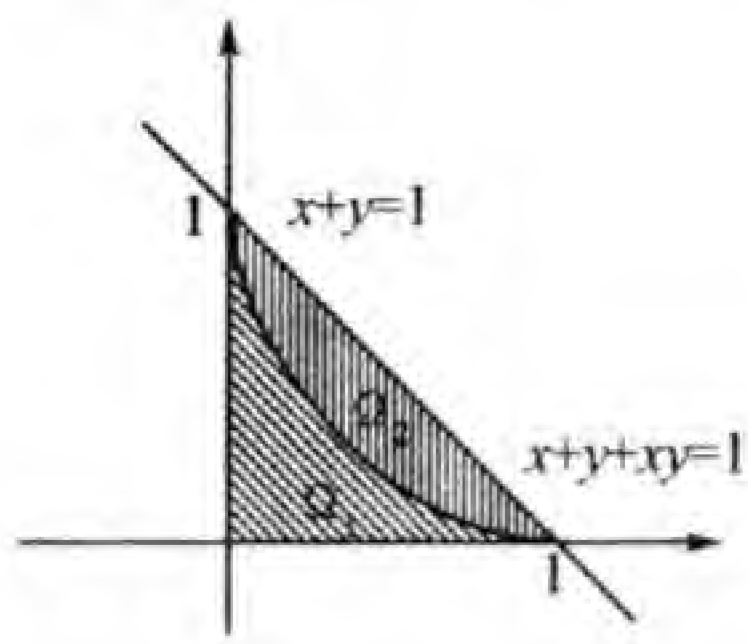
$$=4\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

【4011】 $z=\sin\frac{\pi y}{2x}, z=0, y=x, y=0, x=\pi.$

解 $V=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{x}\sin\frac{\pi y}{2x}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi.$

【4012】 $z=xy, x+y+z=1, z=0.$

解 体积由两部分组成



4012 题图

$$V_1:0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant\frac{1-x}{1+x}, 0\leqslant z\leqslant xy,$$

$$V_2:0\leqslant x\leqslant 1, \frac{1-x}{1+x}\leqslant y\leqslant 1-x,$$

$$0\leqslant z\leqslant 1-x-y.$$

它们在 xOy 平面上的投影域分别 Ω_1,Ω_2，因此，所求体积为

$$\begin{aligned}V&=V_1+V_2\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{1+x}}xy\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y\\&=\left(-\frac{11}{4}+4\ln 2\right)+\left(\frac{25}{6}-6\ln 2\right)=\frac{17}{12}-2\ln 2.\end{aligned}$$

变换成极坐标，求出由以下曲面围成的立体体积(4013～4020).

【4013】 $z^2=xy, x^2+y^2=a^2.$

解 所求体积为

$$\begin{aligned}V&=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\sqrt{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r^2\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\mathrm{d}r\\&=\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\varphi\sin^{\frac{1}{2}}\varphi\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

利用 3856 题的结果可得

$$V=\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\varphi\sin^{\frac{1}{2}}\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{4a^3}{3}\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{2a^3}{3}\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{4a^3\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{3\sqrt{\pi}}.$$

【4014】 $z=x+y,(x^2+y^2)^2=2xy,z=0(x>0,y>0)$.

解 柱顶为平面 $z=x+y$,积分区域为 xOy 平面上由曲线 $(x^2+y^2)^2=2xy,x=0,y=0$ 围成的区域,$(x^2+y^2)^2=2xy$ 的极坐标方程为

$$r^2=2\sin\varphi\cos\varphi=\sin2\varphi\qquad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是所求体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{\sin2\varphi}}r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{\frac{5}{2}}\varphi\cos^{\frac{3}{2}}\varphi+\cos^{\frac{5}{2}}\varphi\sin^{\frac{3}{2}}\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}B\left(\frac{5}{4},\frac{7}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2!}=\frac{\sqrt{2}}{16}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}.$$

注:解答中利用 3856 题的结果及 Γ 函数的余元公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

【4015】 $z=x^2+y^2,x^2+y^2=x,x^2+y^2=2x,z=0$.

解 $x^2+y^2=x,x^2+y^2=2x$ 的极坐标方程为

$$r=\cos\varphi,r=2\cos\varphi\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

所求体积为

$$V=\iint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(16\cos^4\varphi-\cos^4\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{15}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{15}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{45\pi}{32}.$$

【4016】 $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2\geqslant a|x| \quad (a>0)$.

解 先计算下面立体的体积

$$V_1: x^2+y^2+z^2\leqslant a^2, x^2+y^2\leqslant a|x|,$$

$$V_1=8\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant ax\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}}\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r\cdot\sqrt{a^2-r^2}\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi a^3}{3}-\frac{16a^3}{9}.$$

因此,所求体积为

$$V=\text{球体体积}-V_1=\frac{4\pi a^3}{3}-\left(\frac{4\pi a^3}{3}-\frac{16a^3}{9}\right)=\frac{16a^3}{9}.$$

【4017】 $x^2+y^2-az=0, (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$,
$z=0 \quad (a>0)$.

解 在第一象限的积分区域为

$$\Omega_1: 0\leqslant r\leqslant a\sqrt{\cos 2\varphi}, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

利用对称性得所求体积为

$$V=4\iint_{\Omega_1}\frac{1}{a}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\frac{1}{a}r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi a^3}{8}.$$

【4018】 $z=e^{-(x^2+y^2)}, z=0, x^2+y^2=R^2$.

解 利用对称性,得所求体积为

$$V=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R e^{-r^2}r\,dr=\pi(1-e^{-R^2}).$$

【4019】 $z=c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}, z=0, y=x\tan\alpha, y=x\tan\beta$

$(a>0, c>0, 0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\pi)$.

解 所求体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}dx\,dy=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_0^a cr\cdot\cos\frac{\pi r}{2a}dr$$

$$=c(\beta-\alpha)\left[\frac{2ar}{\pi}\sin\frac{\pi r}{2a}+\frac{4a^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi r}{2a}\right]\Bigg|_0^a$$

$$=c(\beta-\alpha)\left(\frac{2a^2}{\pi}-\frac{4a^2}{\pi}\right)=2a^2c(\beta-\alpha)\left(\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi}\right).$$

【4020】 $z=x^2+y^2, z=x+y$.

解 立体在 xOy 平面上的投影区域由曲线

$$x^2+y^2=x+y,$$

即
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

围成,令 $x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi, y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$,

则积分域为

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}},$$

因此,所求体积为

$$V=\iint\limits_{(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\leqslant\frac{1}{2}}[(x+y)-(x^2+y^2)]dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big[1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)$$

$$-\left(r^2+\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right)\Big]r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}-r^2\right)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}.$$

求出由以下曲面围成的立体体积(假定参数为正数)(4021～4035).

【4021】 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}\qquad(z>0).$

解 两曲面的交线在 xOy 平面上的投影为椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}.$$

令 $x=ar\cos\varphi,y=br\sin\varphi$,

则两曲面的方程化为

$$z=c\sqrt{1-r^2},$$

及 $$z=cr.$$

积分区域为 Ω

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}},$$

因此,曲面所界的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}\left[c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}-c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}[c\sqrt{1-r^2}-cr]abr\,\mathrm{d}r$$

$$=abc\cdot 2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(r\sqrt{1-r^2}-r^2)\mathrm{d}r$$

$$=2\pi abc\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}r^3\right]\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{3}\pi abc(2-\sqrt{2}).$$

【4022】 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

解 由对称性并利坐标变换

$$x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi.$$

可得曲面所界的体积为

$$\begin{aligned} V &= 2\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} c\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abcr\ \sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r = 4\pi abc\int_0^1 r(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{4\pi abc}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4\pi abc}{3}(2\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

【4023】 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c},\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b},z=0.$

解 立体在 xOy 平面上的投影域的边界为椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b},$$

即
$$\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

令 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{2}+r\cos\varphi,\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{2}+r\sin\varphi.$

则曲面方程化为

$$z=c\left[\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2\right],$$

积区域为 Ω

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$I=\left|\frac{D(x,y)}{D(\gamma,\varphi)}\right|=abr,$$

所以,曲面所界体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_{(\frac{x}{a}-\frac{1}{2})^2+(\frac{y}{b}-\frac{1}{2})^2\leqslant\frac{1}{2}} c\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\left[\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2\right]\mathrm{d}r \end{aligned}$$

$$= abc\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{6\sqrt{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{1}{16}\right]\mathrm{d}\varphi$$

$$= abc\cdot\frac{3}{16}\cdot 2\pi=\frac{3}{8}abc\pi.$$

【4024】 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z}{c}=1, z=0.$

解 利用坐标变换

$$x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi,$$

可得曲面所界体积为

$$V=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} c\left[1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 c(1-r^4)abr\mathrm{d}r$$

$$=abc\cdot 2\pi\int_0^1(r-r^5)\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi abc.$$

【4025】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1, x=0, y=0, z=0.$

解 作变量代换

$$x=ar\cos^2\varphi, y=br\sin^2\varphi,$$

则曲面方程化为

$$z=c\sqrt{1-r^2}.$$

积分域为:

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 1,$$

$$|I|=2abcr\sin\varphi\cos\varphi=abcr\sin 2\varphi,$$

因此,曲面所界体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega} c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abc\sin 2\varphi\cdot r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r$$

$$= abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi \mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r\right)$$

$$= abc \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{abc}{3}.$$

【4026】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$

解 作坐标代换

$$x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi,$$

则曲面方程化为

$$z = \pm c\sqrt{1-r^2}, r^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi.$$

由 $r^2 = \cos 2\varphi \geqslant 0$,

可得 $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{4}.$

利用对称可得曲面所界体积为

$$V = 8c\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}}\sqrt{1-r^2}\,abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$= 8abc\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3}(1-\sqrt{8}\sin^3\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{8abc}{3}\left(\varphi+\sqrt{8}\cos\varphi-\frac{\sqrt{8}}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{8abc}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2abc}{9}(3\pi+20-16\sqrt{2}).$$

【4027】 $z^2 = xy, x+y=a, x+y=b \quad (0<a<b).$

解 曲面所界立体在 xOy 平面上的投影区域 Ω 由直线 $x+y=a, x+y=b, x=0$ 及 $y=0$ 围成. 利用对称性,知曲面所界体积为 $V = 2\iint\limits_{\Omega}\sqrt{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= 2\left(\int_0^a \mathrm{d}x\int_{a-x}^{b-x}\sqrt{xy}\mathrm{d}y + \int_a^b \mathrm{d}x\int_0^{b-x}\sqrt{xy}\mathrm{d}y\right)$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^a\left[\sqrt{x(b-x)^3}-\sqrt{x(a-x)^3}\right]\mathrm{d}x$$

$$+\frac{4}{3}\int_a^b\sqrt{x(b-x)^3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^b(b-x)\sqrt{x(b-x)}\mathrm{d}x$$

$$-\frac{4}{3}\int_0^a(a-x)\sqrt{a(a-x)}\mathrm{d}x.$$

令 $x=b\sin^2t,0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}.$

则 $$\int_0^b(b-x)\sqrt{x(b-x)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}b\cdot\cos^2t\cdot b\cdot\cos t\cdot\sin t\cdot 2b\sin t\cos t\mathrm{d}t$$

$$=2b^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\cdot\sin^2t\mathrm{d}t$$

$$=2b^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6t\mathrm{d}t\right)$$

$$=2b^3\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{16}\pi b^3.$$

同样 $$\int_0^a(a-x)\sqrt{x(a-x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{16}\pi a^3,$$

因此，曲面所界立体的体积为

$$V=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{16}\pi b^3-\frac{1}{16}\pi a^3\right)=\frac{\pi}{12}(b^3-a^3).$$

【4028】 $z=x^2+y^2,xy=a^2,xy=2a^2,y=\frac{x}{2},y=2x,z=0.$

解 曲面所界立体在 xOy 平面上的投影域 Ω 由曲线 $xy=a^2,xy=2a^2$ 和直线 $y=\frac{x}{2},y=2x$ 所围. 故曲面所界立体的体积为 $$V=\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变量代换 $xy=u,\frac{y}{x}=v.$

则积分域变为 $a^2\leqslant u\leqslant 2a^2,\frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 2,$

且 $$|I|=\frac{1}{2v},x^2+y^2=\left(\frac{u}{v}+uv\right),$$

因此,所求体积为

$$V=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}v\int_{a^2}^{2a^2}\left(\frac{u}{v}+uv\right)\cdot\frac{1}{2v}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{v^2}\right)\mathrm{d}v\int_{a^2}^{2a^2}u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{3}{2}a^4=\frac{9}{4}a^4.$$

【4029】 $z=xy,x^2=y,x^2=2y,y^2=x,y^2=2x,z=0.$

解 曲面所界立体在 xOy 平面上的投影域 Ω 由曲线 $x^2=y$, $x^2=2y,y^2=x,y^2=2x$ 围成. 所以曲面所界立体的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变量代换 $u=\dfrac{x}{y^2},v=\dfrac{y}{x^2}$,

即 $$x=u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}},y=u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}}.$$

则积分域变为

$$\frac{1}{2}\leqslant u\leqslant1,\frac{1}{2}\leqslant v\leqslant1,$$

且 $$|I|=\frac{1}{3}u^{-2}v^{-2}.$$

于是,所求体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}v\int_{\frac{1}{2}}^{1}u^{-3}v^{-3}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}u^{-2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}\right)\left(-\frac{1}{2}v^{-2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}.$$

【4030】 $z=c\sin\dfrac{\pi xy}{a^2},z=0,xy=a^2,y=\alpha x,$

$$y=\beta x\qquad(0<\alpha<\beta;x>0).$$

解 曲面所界立体在 xOy 平面上的投影域 Ω 由曲线 $xy=a^2$,直线 $y=\alpha x,y=\beta x$ 围成. 因此,曲面所界立体的体积为

$$V=\iint_{\Omega} c\sin\frac{\pi xy}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变量代换 $x=ar\cos\varphi, y=ar\sin\varphi$.

则 $\quad |I|=a^2r,$

所以 $$V=c\iint_{\Omega}\sin\frac{\pi xy}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=a^2c\int_{\arctan\alpha}^{\arctan\beta}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}}\sin(\pi r^2\sin\varphi\cos\varphi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{a^2c}{\pi}\int_{\arctan\alpha}^{\arctan\beta}\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{a^2c}{\pi}\ln\tan\varphi\Big|_{\arctan\alpha}^{\arctan\beta}$$
$$=\frac{a^2c}{\pi}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

【4031】 $z=x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}, z=0, x+y=1, x=0, y=0.$

解 曲面所界立体在 xOy 平面上的投影域 Ω 由直线 $x+y=1, x=0$ 及 $y=0$ 围成. 因此,曲面所界立体的体积为

$$V=\iint_{\Omega}(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left[x^{\frac{3}{2}}(1-x)+\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{35}(1-x)^{\frac{7}{2}}\right]\Big|_0^1$$
$$=\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\frac{4}{35}=\frac{8}{35}.$$

【4032】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c}=1, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1, z=0.$

解 曲面所围立体在 xOy 平面上的投影域 Ω 由曲线 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ 围成. 作变量代换

$$x=ar\cos^3\varphi, y=br\sin^3\varphi.$$

则 Ω 变为域

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 1,$$

且 $$|I|=3abr\cos^2\varphi\sin^2\varphi$$

由对称性得所求立体的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}c\left[1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 c[1-r^2(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)]3abr\cos^2\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}r$$

$$=12abc\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos^2\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)\cos^2\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right]$$

$$=6abc\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right]$$

$$=6abc\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\mathrm{d}\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8\varphi\mathrm{d}\varphi\right.$$
$$\left.+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}\varphi\mathrm{d}\varphi\right]$$

$$=6abc\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]=\frac{75}{256}\pi abc.$$

【4033】 $z=c\arctan\dfrac{y}{x},z=0,\sqrt{x^2+y^2}=a\arctan\dfrac{y}{x}$ $(y\geqslant 0)$.

解 曲面所界立体的 xOy 平面上的投影域 Ω 由曲线 $\sqrt{x^2+y^2}=a\arctan\dfrac{y}{x}$ 及直线 $x=0,y=0$ 围成. 作变量代换

$$x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi.$$

则积分域 Ω 变为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant a\varphi,$$

故所求立体的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}c\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\varphi}c\varphi r\,\mathrm{d}r$$

$$= c\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(a\varphi)^2\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2c}{2}\cdot\frac{1}{4}\varphi^4\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2c\pi^4}{128}.$$

【4033.1】 $z = y\mathrm{e}^{-\frac{xy}{a^2}}, xy = a^2, xy = 2a^2, y = m, y = n,$
$z = 0 \qquad (0 < m < n).$

解 曲面所围立体在 xOy 平面上的投影域 Ω 由曲线 $xy = a^2, xy = 2a^2$ 及直线 $y = m, y = n$ 围成. 所以,所求立体的体积为

$$V = \iint\limits_{\Omega} y\mathrm{e}^{-\frac{xy}{a^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变量代换 $u = \frac{xy}{a^2}, v = y.$

则积分域 Ω 变为

$$1 \leqslant u \leqslant 2, m \leqslant v \leqslant n, \mid I \mid = \frac{a^2}{v},$$

因此 $\quad V = \int_1^2 \mathrm{d}u\int_m^n v\mathrm{e}^{-u}\frac{a^2}{v}\mathrm{d}v = a^2(n-m)\int_1^2 \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$

$$= \frac{a^2(n-m)}{\mathrm{e}^2}(\mathrm{e}-1).$$

【4034】 $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, x = 0, y = 0, z = 0 \qquad (n > 0).$

解 曲面所界立体在 xOy 平面上的投影域 Ω, 由曲线 $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} = 1$ 及直线 $x = 0, y = 0$ 围在. 所以,所求立体的体积为

$$V = \iint\limits_{\Omega} c\sqrt[n]{1 - \left(\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变量代换 $x = ar\cos^{\frac{2}{n}}\varphi, y = br\sin^{\frac{2}{n}}\varphi.$

则积分域变为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 1,$$

$$\mid I \mid = \frac{2ab}{n}r\cdot\cos^{\frac{2-n}{n}}\varphi\cdot\sin^{\frac{2-n}{n}}\varphi,$$

因此 $\quad V = \frac{2abc}{n}\int_0^1 \sqrt[n]{1-r^n}\, r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2-n}{n}}\varphi\cdot\sin^{\frac{2-n}{n}}\varphi\mathrm{d}\varphi,$

若令 $r^n = t$,

则得 $$\int_0^1 \sqrt[n]{(1-r^n)}\,r\mathrm{d}r = \frac{1}{n}\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{2}{n}-1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n}+1, \frac{2}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{3}{n}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{3n\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

由 3856 题的结果有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2-n}{n}}\varphi \sin^{\frac{2-n}{n}}\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)},$$

因此

$$V = \frac{abc}{3n^2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} = \frac{abc}{3n^2}\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

【4035】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1, x = 0, y = 0,$

$z = 0 \qquad (n > 0, m > 0).$

解 曲面所界立体在 xOy 平面上的投影域 Ω 由曲线 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n = 1$ 及直线 $x = 0, y = 0$ 围成. 所以,曲面所界立体的体积为

$$V = \iint_\Omega c\sqrt[m]{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变量代换

$$x = ar\cos^2\varphi, y = br\sin^2\varphi.$$

则积分域 Ω 变为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 1,$$

$$|I| = 2abr\cos\varphi\sin\varphi,$$

因此
$$V = 2abc\int_0^1 \sqrt[m]{1-r^n} \cdot r\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= abc\int_0^1 \sqrt[m]{1-r^n} \cdot r\mathrm{d}r \qquad (\text{令 } r^n = t)$$

$$= \frac{abc}{n}\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{m}} t^{\frac{2}{n}-1}\mathrm{d}t = \frac{abc}{n} B\left(\frac{1}{m}+1, \frac{2}{n}\right)$$

$$= \frac{abc}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}+1\right)}$$

$$= \frac{abc}{n} \cdot \frac{\frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)}$$

$$= \frac{abc}{n+2m} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)}.$$

§4. 曲面面积的计算

1. **曲面由显函数给出的情况** 平滑曲面 $z = z(x, y)$ 的面积用以下积分表示：

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Ω 为给定曲面在 Oxy 面上的投影.

2. **曲面由参数给出的情况** 若曲面方程是用参数给出

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$$

其中 $(u, v) \in \Omega$，Ω 为封闭的可求积有界区域，而且若函数 x、y 和 z 在 Ω 域内是连续可微的，则对于曲面面积有以下公式：

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

其中
$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

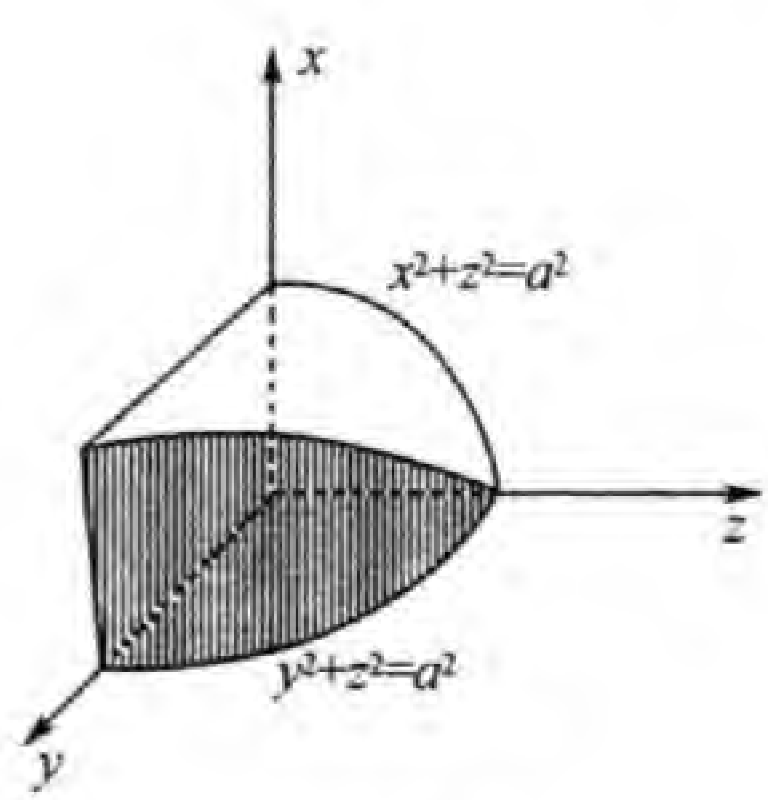
【4036】 求曲面 $az=xy$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 内的那部分曲面面积.

解 所求曲面面积为

$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{1+\left(\frac{y}{a}\right)+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{a}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2+(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\sqrt{a^2+r^2}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{2\pi a^2}{3}(2\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

【4037】 求由曲面 $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ 围成立体的曲面面积.

解 如 4037 题图所示:两曲面的交线在 yOz 平面上的投影为圆



4037 题图

$$y^2+z^2=a^2, x=0,$$

所以,利用对称性得所求面积为

$$S=4\iint\limits_{y^2+z^2\leqslant a^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $x=\sqrt{a^2-z^2}$,

因此
$$S=4\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{1+0+\left(-\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=4\cdot 4\int_0^a\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}y=16a^2.$$

【4038】 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包括在圆柱 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(b\leqslant a)$ 内的那部分面积.

解 对于曲面

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

有
$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

积分域为椭圆域 Ω

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

所以由对称性知,所求面积为

$$S=2\iint\limits_{\Omega}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\cdot 4\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y$$

$$= 8a\int_0^a \left(\arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx$$

$$= 8a\int_0^a \left(\arcsin \frac{b}{a}\right)dx = 8a^2\arcsin \frac{b}{a}.$$

【4039】 求曲面 $z^2 = 2xy$ 被平面 $x+y=1, x=0, y=0$ 截下的那部分面积.

解 对曲面 $z^2 = 2xy$ 有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{y^2}{z^2}+\frac{x^2}{z^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{2xy}} = \frac{x+y}{\sqrt{2}\sqrt{xy}}.$$

积分域由直线 $x+y=1, x=0, y=0$ 围成. 所以,由对称性知所求面积为

$$S = \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{x+y}{\sqrt{xy}}dy$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1\left[2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}+\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x}}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1\frac{2\sqrt{1-x}(1+2x)}{3\sqrt{x}}dx \qquad (令\sqrt{x}=t)$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1\sqrt{1-t^2}(1+2t^2)dt = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

【4040】 求曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 位于圆柱 $x^2+y^2=\pm ax$ 之外的那部分面积(维维安尼问题).

解 只须求出球面被圆柱面割出部分的面积,对于球面有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

利用对称性知割出部分的面积为

$$S=4\iint\limits_{(x-\frac{a}{2})^2+y^2\leqslant(\frac{a}{2})^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r=8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right),$$

因而,所求的面积为

$$S_0=\text{球面面积}-S=4\pi a^2-8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=8a^2.$$

【4041】 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内的那部分的面积.

解 对于曲面

$$z=\sqrt{x^2+y^2},$$

有 $$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=\sqrt{2},$$

所以,所求曲面面积为

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2x}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi.$$

【4042】 求曲面 $z=\sqrt{x^2-y^2}$ 包含在圆柱 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 内的那部分的面积.

解 对于曲面

$$z=\sqrt{x^2-y^2},$$

有 $$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

积分域 Ω 由双纽线 $r^2=a^2\cos2\varphi$ 围成,由对称性知,所求曲面面积为 $$S=\iint\limits_{\Omega}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}}\frac{\sqrt{2}r\cdot\cos\varphi}{r\sqrt{\cos2\varphi}}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}\,d\varphi$$

$$= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-2\sin^2\varphi}\,d(\sqrt{2}\sin\varphi)$$

$$= 2a^2\left[\frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{2}\sqrt{1-2\sin^2\varphi}+\frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{2}\sin\varphi)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi a^2}{2}.$$

【4043】 求曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ 被平面 $x-y=\pm 1, x+y=\pm 1$ 截下的那部分面积.

解 对于曲面

$$z=\frac{1}{2}(x^2-y^2),$$

有
$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}.$$

积分域 Ω 由直线 $x-y=\pm 1, x+y=\pm 1$ 围成. 所以,所求面积为

$$S=\iint_{\Omega}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

作变量代换

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}u-\frac{\sqrt{2}}{2}v, y=\frac{\sqrt{2}}{2}u+\frac{\sqrt{2}}{2}v,$$

则积分域变为正方形:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant v\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2},$$

且
$$|I|=1.$$

故利用对称可得

$$S=4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}du\int_{-u}^{u}\sqrt{1+u^2+v^2}\,dv$$

$$=4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Big[\frac{v}{2}\sqrt{1+u^2+v^2}+\frac{1+u^2}{2}\ln|v$$

$$+\sqrt{1+u^2+v^2}\,|\,]\Big|_{-u}^{u}\mathrm{d}u$$

$$=4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left\{u\sqrt{1+2u^2}+\frac{1+u^2}{2}\ln\frac{\sqrt{1+2u^2}+u}{\sqrt{1+2u^2}-u}\right\}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{3}(1+2u^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+2\left(u+\frac{u^3}{2}\right)\ln\frac{\sqrt{1+2u^2}+u}{\sqrt{1+2u^2}-u}\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$-2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(u+\frac{u^3}{3}\right)\cdot\frac{2}{(1+u^2)\sqrt{1+2u^2}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln 3-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1+\frac{u^2}{3}}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}(1+2u^2)}{\sqrt{1+2u^2}}.$$

令 $\sqrt{1+2u^2}=t$,

即 $u^2=\dfrac{t^2-1}{2}$,

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1+\frac{u^2}{3}}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}(1+2u^2)}{\sqrt{1+2u^2}}=\frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2+5}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)+\frac{8}{3}\arctan t\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)+\frac{8}{3}\arctan\sqrt{2}-\frac{2\pi}{3}.$$

因此 $$S=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln 3-\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)-\frac{8}{3}\arctan\sqrt{2}+\frac{2\pi}{3}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{7}{4}\ln 3\right)-\frac{8}{3}\arctan\sqrt{2}+\frac{2\pi}{3}.$$

【4044】 求曲面面积 $x^2+y^2=2az$ 包含在圆柱 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 之内的那部分面积.

解 对于曲面

$$x^2+y^2=2az,$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2+y^2}.$$

积分域 Ω 由双纽线 $r^2 = a^2\sin 2\varphi$ 围成，由对称性得所求面积为

$$\begin{aligned}
S &= \iint_{\Omega} \frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2+y^2}\,dxdy \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \frac{1}{a}\sqrt{a^2+r^2}\cdot r dr \\
&= \frac{4}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} [a^3(1+\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} - a^3]d\varphi \\
&= \frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\varphi+\sin\varphi)^3 d\varphi - \frac{\pi a^2}{3},
\end{aligned}$$

而 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin\varphi+\cos\varphi)^3 d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)d\varphi \qquad \left(令\frac{\pi}{4}-\varphi = t\right) \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 t dt = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2 t)d(\sin t) \\
&= 2\sqrt{2}\left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

因此 $$S = \frac{4a^2}{3}\cdot\frac{5}{3} - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{a^2}{9}(20-3\pi).$$

【4045】 求曲面 $x^2+y^2=a^2$ 被平面 $x+z=0, x-z=0$ $(x>0, y>0)$ 截下的那部分面积.

解 在 xOz 平面的积分域 Ω 由直线 $x+z=0, x-z=0$, $x=a$ 围成. 且对于柱面 $x^2+y^2=a^2$，有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

所以，所求曲面面积为

$$S = \iint_{\Omega} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dxdz = \int_0^a dx\int_{-x}^{x} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dz$$

$$=\int_0^a \frac{2ax}{\sqrt{a^2-x^2}}=2a^2.$$

【4045.1】 求曲面$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+z=1$被平面$z=0$截下的那部分面积.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=3(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot x, \frac{\partial z}{\partial y}=3(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot y,$

所以 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+9(x^2+y^2)^2}.$

积分区域Ω为圆域:$x^2+y^2\leqslant 1$.
故所求面积为

$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{1+9(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{1+9r^4}\,r\mathrm{d}r\\&=2\pi\cdot\frac{1}{6}\int_0^1\sqrt{1+(3r^2)^2}\mathrm{d}(3r^2)\\&=\frac{\pi}{3}\left[\frac{3r^2}{2}\sqrt{1+9r^4}+\frac{1}{2}\ln(3r^2+\sqrt{1+9r^4})\right]\Big|_0^1\\&=\frac{\pi}{3}\left[\frac{3}{2}\sqrt{10}+\frac{1}{2}\ln(3+\sqrt{10})\right].\end{aligned}$$

【4045.2】 求曲面$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{2z}{c}=1$被平面$x=0,y=0$和$z=0$截下的那部分面积.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{c}{a}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right), \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c}{b}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right),$

从而 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2}.$

积分域Ω由直线$\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right|=1$及$x=0,y=0$围成. 因此所求面积为$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+\frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

作变量代换 $x = ar\cos^2\varphi, y = br\sin^2\varphi$,
则积分域 Ω 变为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 1,$$

$$|I| = 2abr\cos\varphi \cdot \sin\varphi,$$

因此
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}r^2} \cdot 2abr\cos\varphi\sin\varphi dr$$

$$= 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}r^2} \cdot r dr$$

$$= ab\,\frac{a^2b^2}{2c^2(a^2+b^2)} \cdot \frac{2}{3}\left[1 + \frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}r^2\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{3c^2(a^2+b^2)}\{[a^2b^2 + c^2(a^2+b^2)]^{\frac{3}{2}} - a^3b^3\}.$$

【4045.3】 求曲面$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$ 被曲面$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(z \geqslant 0)$截下的那部分面积.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{b}$.

则
$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

积分区域 Ω 为椭圆域

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,$$

故所求面积为

$$S = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dxdy.$$

作变量代换 $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi$,

则
$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\, abr\, dr$$

$$= 2\pi ab \cdot \frac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}ab(\sqrt{2}-1).$$

【4045.4】 求曲面 $\sin z = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$ 被平面 $x = 1$ 和 $x = 2$ $(y \geqslant 0)$ 截下的那部分面积.

解 由于 $|\sin z| \leqslant 1$，所以积分域 Ω 为：$0 \leqslant y \leqslant \operatorname{arcsh}\frac{1}{\operatorname{sh}x}$，$1 \leqslant x \leqslant 2$. 将曲面方程改写为 $z = \arcsin(\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y)$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y}{\sqrt{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}},\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y}{\sqrt{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}},$$

从而

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{\operatorname{ch}^2x\operatorname{sh}^2y+\operatorname{sh}^2\operatorname{ch}^2y}{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}} = \frac{\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y}{\sqrt{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}}.$$

故所求曲面面积为

$$\begin{aligned}
S &= \iint\limits_{\Omega}\frac{\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y}{\sqrt{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{\operatorname{arcsh}\frac{1}{\operatorname{sh}x}}\frac{\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y}{\sqrt{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}}\mathrm{d}y \\
&= \int_1^2\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}\int_0^{\operatorname{arcsh}\frac{1}{\operatorname{sh}x}}\frac{\mathrm{d}(\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}y)}{\sqrt{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}} \\
&= \int_1^2\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}\arcsin(\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}y)\Big|_{y=0}^{y=\operatorname{arcsh}\frac{1}{\operatorname{sh}x}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}\int_1^2\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln\frac{\operatorname{sh}2}{\operatorname{sh}1} = \frac{\pi}{2}\ln(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}).
\end{aligned}$$

【4046】 求由曲面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$，$x+y+z=2a(a>0)$ 所围的立体的表面积和体积.

解 曲面的交线在 xOy 平面上的投影曲线为

$$3x^2+3y^2=(2a-x-y)^2,$$

即

$$x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2.$$

令 $x=\frac{u-v}{\sqrt{2}}$，$y=\frac{u+v}{\sqrt{2}}$，

则方程变为

$$\frac{\left(u+\frac{4a}{\sqrt{2}}\right)^2}{(2\sqrt{3}a)^2}+\frac{v^2}{(2a)^2}=1,$$

所以,所界物体在 xOy 平面上的投影域为以 $2a$ 为短半轴,$2\sqrt{3}a$ 为长半轴的椭圆物体的表面积由截面和截出的锥面两部分组成.

对于 $z=2a-x-y$,

有 $$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{3}.$$

对于 $$z=\sqrt{3x^2+3y^2},$$

有 $$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=2.$$

于是,物体的表面积为

$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Omega}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\sqrt{3}+2)\pi\cdot 2a\cdot 2\sqrt{3}a\\&=4a^2\pi(3+2\sqrt{3}).\end{aligned}$$

又所截椭圆锥的高 h 为坐标原点到平面 $x+y+z=2a$ 的距离,即

$$h=\left|\frac{-2a}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|=\frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

截圆锥的底面面积为

$$A=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\pi\cdot 2a\cdot 2\sqrt{3}a=12\pi a^2,$$

因此,所求物体的体积为

$$V=\frac{1}{3}Ah=\frac{1}{3}\cdot 12\pi a^2\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi a^3.$$

【4047】 求由两条纬线和两条经线所围的那部分球面面积.

解 球面的参数方程为

$$x=R\cos\varphi\cos\psi,y=R\sin\varphi\cos\psi,z=R\sin\psi,$$

其中 R 为球的半径,φ 为经线的经度,ψ 为纬线的纬度,因为

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$= R^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + R^2\cos^2\varphi\cos^2\psi = R^2\cos^2\psi,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2$$

$$= R^2\cos^2\varphi\sin^2\psi + R^2\sin^2\varphi\sin^2\psi + R^2\cos^2\psi = R^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\psi} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\psi} + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}$$

$$= R^2\sin\varphi\cos\psi\cos\varphi\sin\psi - R^2\sin\varphi\cos\psi\cos\varphi\sin\psi + 0$$

$$= 0.$$

故 $$\sqrt{EG-F^2} = R^2\cos\psi,$$

于是所求面积为

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{d}\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2}R^2\cos\psi\mathrm{d}\psi = R^2(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1).$$

【4048】 求螺旋面 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = h\varphi$（其中 $0 < r < a, 0 < \varphi < 2\pi$）的面积.

解 因为

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2 = r^2+h^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi} + \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0,$$

故 $$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{r^2+h^2},$$

因此所求面积为

$$S = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\sqrt{r^2+h^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\left[\frac{r}{2}\sqrt{r^2+h^2} + \frac{h^2}{2}\ln(r+\sqrt{r^2+h^2})\right]\Bigg|_0^a$$

$$= \pi a\sqrt{a^2+h^2} + \pi h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}.$$

【4049】 求环面 $x = (b+a\cos\psi)\cos\varphi, y = (b+a\cos\psi)\sin\varphi, z = a\sin\psi (0 < a \leqslant b)$ 被两条经线 $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ 和两条纬线 $\psi =$

$\psi_1, \psi=\psi_2$ 所围的那部分面积. 整个环的表面积等于多少?

解 因为

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2=(b+a\cos\psi)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2=a^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial \psi}+\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \psi}+\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \psi}=0,$$

故 $\qquad \sqrt{EG-F^2}=a(b+a\cos\psi),$

因此,所求面积为

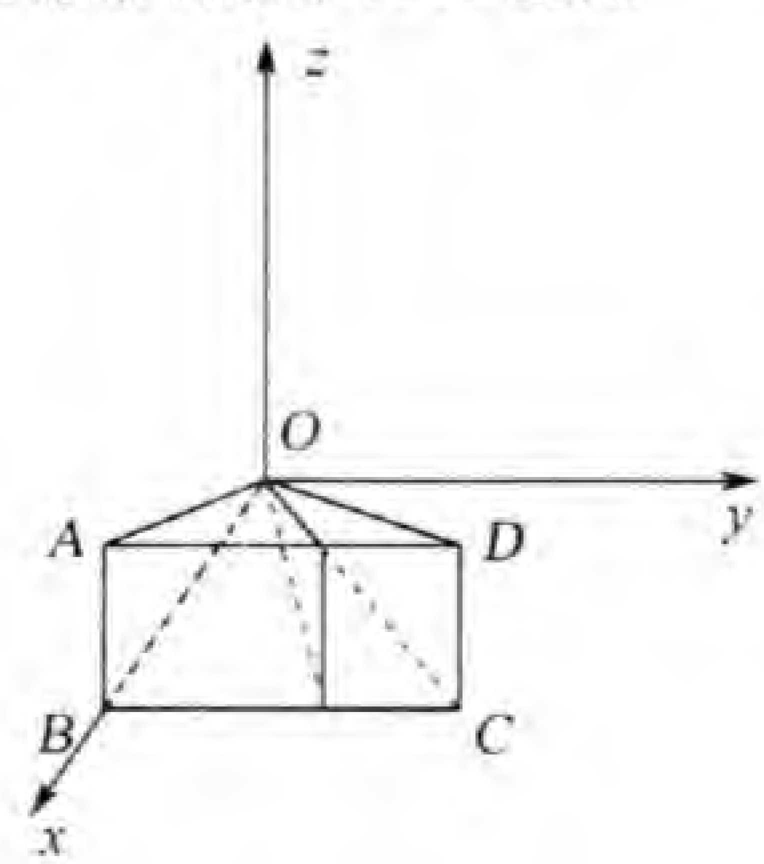
$$\begin{aligned}S&=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{d}\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2}a(b+a\cos\psi)\,\mathrm{d}\psi\\&=a(\varphi_2-\varphi_1)[b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)].\end{aligned}$$

整个环面的表面积为

$$A=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\pi}^{\pi}a(b+a\cos\psi)\,\mathrm{d}\psi=4\pi^2ab.$$

【4050】 求从坐标原点可以看见矩形 $x=a>0, 0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$ 的立体角 ω. 若 a 很大,则对于 ω 推导近似公式.

解 以坐标原点为球心作单位球,则 ω 即为该球面含于四面体 $OABCD$ 内的面积,其中 $ABCD$ 是以 b、c 为边长的矩形,如 4050 题图所示. 取球面坐标系,则由 4047 题知



4050 题图

$$\sqrt{EG-F^2}=\cos\psi,$$

又 φ 和 ψ 的变化域为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$0\leqslant\psi\leqslant\arcsin\frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}}.$$

于是,立体角

$$\begin{aligned}\omega&=\int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\arcsin\frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\\&=\int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi\\&=\int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin\varphi\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin\varphi\right)^2}}\\&=\arcsin\left[\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\cdot\sin\left(\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right]\\&=\arcsin\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}}.\end{aligned}$$

当 a 很大时,有

$$\begin{aligned}&\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}}\\&=\frac{bc}{a^2\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\sqrt{1+\left(\frac{c}{a}\right)^2}}\approx\frac{bc}{a^2}.\end{aligned}$$

故得 ω 的近似公式

$$\omega\approx\frac{bc}{a^2}.$$

§5. 二重积分在力学上的应用

1. **重心**　若 x_0 和 y_0 为平面 Oxy 上薄板 Ω 的重心坐标而 $\rho = \rho(x,y)$ 为薄板的密度,则

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_{\Omega}\rho x\,dx dy, y_0 = \frac{1}{M}\iint_{\Omega}\rho y\,dx dy, \qquad ①$$

其中 $M = \iint_{\Omega}\rho\,dx dy$ 为薄板的质量.

若薄板是均质的,则公式 ① 中应假定 $\rho = 1$.

2. **转动惯量**　I_x 和 I_y 为平面 Oxy 上薄板 Ω 对着坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量,相应地用下式表示:

$$I_x = \iint_{\Omega}\rho y^2\,dx dy, I_y = \iint_{\Omega}\rho x^2\,dx dy, \qquad ②$$

其中 $\rho = \rho(x,y)$ 为薄板的密度.

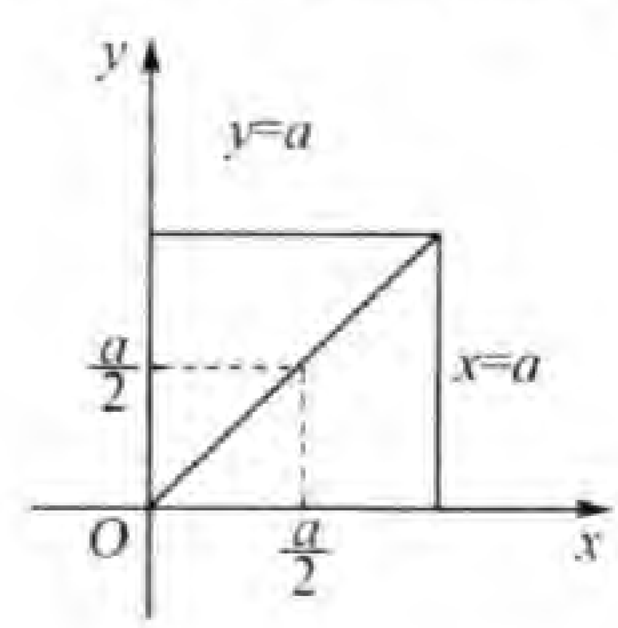
下面来研究离心转动惯量:

$$I_{xy} = \iint_{\Omega}\rho xy\,dx dy. \qquad ③$$

公式 ② 和 ③ 中假定 $\rho = 1$,得出平面图形的几何转动惯量.

【4051】　求边长为 a 的正方形薄板的质量. 若薄板上每一个点的密度与该点离正方形的顶点的距离成正比,且在正方形中心等于 ρ_0.

解　取如 4051 题图所示的坐标系. 则密度



4051 题图

$$\rho = k\sqrt{x^2+y^2}.$$

由 $$\rho_0 = k\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

故 $$k=\frac{\sqrt{2}\rho_0}{a},$$

从而 $$\rho=\frac{\sqrt{2}\rho_0}{a}\sqrt{x^2+y^2},$$

因此薄板的质量为

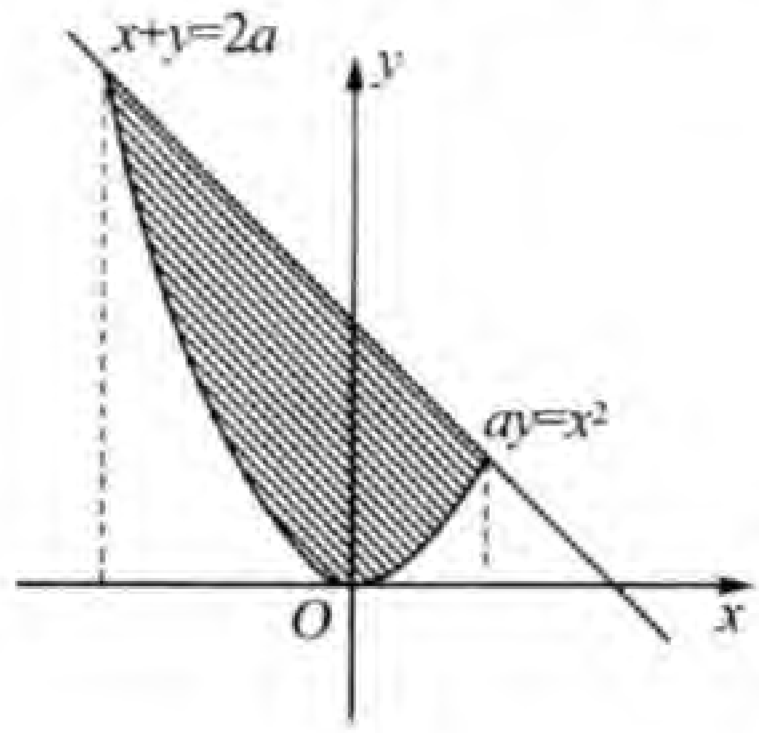
$$\begin{aligned}
M &= \iint_{\Omega}\frac{\sqrt{2}\rho_0}{a}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}\rho_0}{a}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sqrt{2}\rho_0}{a}\int_0^a\left[\frac{y}{2}\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{2}\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})\right]\Bigg|_0^a\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{2}\rho_0}{2a}\int_0^a\left(a\sqrt{a^2+x^2}+x^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{2}\rho_0}{2a}\left[\int_0^a a\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{3}x^3\ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right)\Bigg|_0^a\right. \\
&\qquad\left.+\frac{a}{3}\int_0^a\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}\rho_0}{2a}\left[\frac{1}{3}a^3\ln(1+\sqrt{2})+\frac{4a}{3}\int_0^a\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x\right. \\
&\qquad\left.-\frac{a^3}{3}\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}\rho_0}{2a}\left[\frac{1}{3}a^3\ln(1+\sqrt{2})\right. \\
&\qquad+\frac{4a}{3}\cdot\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\Bigg|_0^a\right. \\
&\qquad\left.\left.-\frac{a^2}{3}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\Bigg|_0^a\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}\rho_0}{2a}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3+\frac{2a^3}{3}\ln(1+\sqrt{2})\right)
\end{aligned}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\rho_0 a^2}{3}[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})].$$

求由下列曲线所围的均质薄板的重心坐标(4052 ~ 4058).

【4052】 $ay=x^2, x+y=2a \qquad (a>0)$.

解 密度 ρ 为常数,积分域如 4052 题图所示.质量



4052 题图

$$M=\rho\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}\mathrm{d}y=\frac{9}{2}\rho a^2,$$

对于坐标轴的一次矩为

$$M_y=\rho\int_{-2a}^{a}x\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}\mathrm{d}y=-\frac{9}{4}\rho a^3,$$

$$M_x=\rho\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}y\mathrm{d}y=\frac{36}{5}\rho a^3,$$

所以重心(x_0,y_0)为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=-\frac{a}{2}, y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{8}{5}a.$$

【4053】 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}, x=0, y=0$.

解 质量及对坐标轴的一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^a\mathrm{d}x\int^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{6}\rho a^2,$$

$$M_y=\rho\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{30}\rho a^3,$$

$$M_x=\int_0^a y\mathrm{d}y\int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{y})^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{30}\rho a^3,$$

所以重心(x_0,y_0)为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{a}{5},y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{a}{5}.$$

【4054】 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\qquad(x>0,y>0)$.

解 质量和对 Oy 轴的一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^a dx\int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}dy=\rho\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}dx$$

$$(令\ x=a\cos^3t)$$

$$=3\rho a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos^2t\,dt=3\rho a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4t-\sin^6t)dt$$

$$=3\rho a^2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi a^2\rho}{32},$$

$$M_y=\rho\int_0^a x\,dx\int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}dy=\rho\int_0^a x(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}dx$$

$$令\ x=a\cos^3t$$

$$=3\rho a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos^5t\,dt$$

$$=3\rho a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t(1-\sin^2t)^2d(\sin t)=\frac{8a^3\rho}{105}.$$

于是重心的横坐标

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{256a}{315\pi}.$$

由关于直线 $y=x$ 的对称性知

$$x_0=y_0=\frac{256a}{315\pi}.$$

【4055】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$ （线圈）.

解 作变量代换

$$\begin{aligned}x&=\frac{a^2b}{c^2}r\cos^4\varphi\sin^2\varphi\\y&=\frac{ab^2}{c^2}r\cos^2\varphi\sin^4\varphi\end{aligned}\qquad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

则原曲线方程变为

$$r=1 \qquad \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

又 $$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\frac{2a^3b^3}{c^4}r(\sin^5\varphi\cos^7\varphi+\sin^7\varphi\cos^5).$$

故利用3856题的结果有

$$\begin{aligned}M&=\iint_\Omega\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{2a^3b^3}{c^4}\rho\int_0^1r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5\varphi\cos^7\varphi+\sin^7\varphi\cos^5\varphi)\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{a^3b^3}{c^4}\rho\left[\frac{1}{2}B(3,4)+\frac{1}{2}B(4,3)\right]=\frac{a^3b^3}{c^4}\rho B(3,4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_y&=\iint_\Omega\rho x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{2a^5b^4}{c^6}\rho\int_0^1r^2\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\sin^2\varphi(\sin^5\varphi\cos^7\varphi\\&\quad+\sin^7\varphi\cos^5\varphi)\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{2}{3}\frac{a^5b^4}{c^6}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\varphi\cos^{11}\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9\varphi\cos^9\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\\&=\frac{1}{3}\frac{a^5b^4}{c^6}\rho[B(4,6)+B(5,5)].\end{aligned}$$

于是 $$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{a^2b}{3c^2}\cdot\frac{B(4,6)+B(5,5)}{B(3,4)},$$

而 $$B(4,6)=\frac{\Gamma(4)\Gamma(6)}{\Gamma(10)}=\frac{3!5!}{9!},$$

$$B(5,5)=\frac{\Gamma(5)\Gamma(5)}{\Gamma(10)}=\frac{(4!)^2}{9!},$$

$$B(3,4)=\frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)}=\frac{2!3!}{6!}.$$

因此 $$x_0=\frac{a^2b}{3c^2}\cdot\frac{6![3!5!+(4!)^2]}{2!3!9!}=\frac{a^2b}{14c^2}.$$

同理可求得

$$y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{ab^2}{14c^2}.$$

【4056】 $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy \qquad (x>0, y>0).$

解 曲线的极坐标方程为

$$r^2 = a^2\sin 2\varphi \qquad \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

质量及对 Oy 轴的一次矩为

$$M = \iint_{\Omega} \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r\mathrm{d}r = \frac{\rho a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{\rho a^2}{2},$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \iint_{\Omega}\rho x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r^2\cos\varphi\mathrm{d}r \\
&= \frac{\rho a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin^{\frac{3}{2}}2\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{2\sqrt{2}\rho a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{5}{2}}\varphi\cdot\sin^{\frac{3}{2}}\varphi\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}\rho a^3\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{7}{4},\frac{5}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\rho a^3\frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(3)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}\rho a^3\frac{\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{16}\rho a^3\cdot\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16}\pi\rho a^3,
\end{aligned}$$

于是 $\quad x_0 = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{\pi a}{8}.$

由关于直线 $y=x$ 的对称性知

$$x_0 = y_0 = \frac{\pi a}{8},$$

即重心为$\left(\dfrac{\pi a}{8},\dfrac{\pi a}{8}\right)$.

【4057】 $r = a(1+\cos\varphi), \varphi = 0.$

解 质量和对坐标轴的一次矩分别为

$$M = \rho\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\rho a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{3\pi}{4}\rho a^2,$$

$$M_y = \rho\int_0^\pi d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2\cos\varphi dr = \frac{\rho a^3}{3}\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3\cos\varphi d\varphi$$

$$= \frac{\rho a^3}{3}\int_0^\pi \left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)^3\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1\right)d\varphi$$

$$= \frac{\rho a^3}{3}\left(32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 t dt - 16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t dt\right)$$

$$= \frac{\rho a^3}{3}\left(32\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 16\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{5\pi\rho a^3}{8},$$

$$M_x = \rho\int_0^\pi d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2\sin\varphi dr = \frac{\rho a^3}{3}\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi$$

$$= -\frac{\rho a^3}{3}\frac{(1+\cos\varphi)^4}{4}\Big|_0^\pi = \frac{4\rho a^3}{3}.$$

于是重心坐标为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{5a}{6}, y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{16a}{9\pi}.$$

【4058】 $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)$

$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi), y = 0.$

解 质量及对 Ox 轴的一次矩为

$$M = \rho\int_0^{2\pi a} dx\int_0^{y_1} dy = \rho\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = 3\pi\rho a^2,$$

$$M_x = \rho\int_0^{2\pi a} dx\int_0^{y_1} y dy = \frac{1}{2}\rho a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt = \frac{5\pi}{2}\rho a^3,$$

其中 $y_1 = a(1-\cos t)$,

于是 $y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{5a}{6}.$

由对称性知 $x_0 = \pi a$.

【4059】 求圆薄板 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 的重心坐标，设薄板在 $M(x,y)$ 点上的密度与 M 点到 $A(a,0)$ 点的距离成正比.

解 由题设知密度为

$$\rho=k\sqrt{(x-a)^2+y^2}\qquad (k\text{ 为常数}).$$

于是质量为

$$\begin{aligned}
M&=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}k\sqrt{(x-a)^2+y^2}\mathrm{d}y\\
&=k\int_{-a}^{a}\Big[y\sqrt{(x-a)^2+y^2}\\
&\quad+(x-a)^2\cdot\ln(y+\sqrt{(x-a)^2+y^2})\Big]_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\\
&=k\Big(\int_{-a}^{a}\sqrt{2a}(a-x)\sqrt{a+x}\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{-a}^{a}(x-a)^2\ln(\sqrt{a+x}+\sqrt{2a})\mathrm{d}x\\
&\quad-\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}(a-x)^2\ln(a-x)\mathrm{d}x\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-a}^{a}\sqrt{2a}(a-x)(a+x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\
&=\sqrt{2a}\int_{-a}^{a}\left[2a(x+a)^{\frac{1}{2}}-(x+a)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}x\\
&=\sqrt{2a}\left[\frac{4a}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}(x+a)^{\frac{5}{2}}\right]\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{32}{15}a^3
\end{aligned}$$

令 $\sqrt{a+x}=t$.

则

$$\begin{aligned}
&\int_{-a}^{a}(x-a)^2\ln(\sqrt{a+x}+\sqrt{2a})\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\sqrt{2a}}2t(2a-t^2)^2\ln(t+\sqrt{2a})\mathrm{d}t\\
&=8a^2\int_0^{\sqrt{2a}}t\ln(t+\sqrt{2a})\mathrm{d}t-8a\int_0^{\sqrt{2a}}t^3\ln(t+\sqrt{2a})\mathrm{d}t\\
&\quad+2\int_0^{\sqrt{2a}}t^5\ln(t+\sqrt{2a})\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= 8a^2\left(\frac{a}{2} + a\ln\sqrt{2a}\right) - 8a\left(\frac{7}{12}a^2 + a^2\ln\sqrt{2a}\right)$$

$$+ 2\left(\frac{37}{45}a^3 + \frac{4}{3}a^3\ln\sqrt{2a}\right)$$

$$= \frac{44}{45}a^3 + \frac{4}{3}a^3\ln 2a.$$

令 $a - x = t$,

则有 $\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}(a-x)^2\ln(a-x)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2a}t^2\ln t\mathrm{d}t = \frac{1}{6}t^3\ln t\Big|_0^{2a} - \frac{1}{6}\int_0^{2a}t^3\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{4}{3}a^3\ln 2a - \frac{4}{9}a^3,$$

因此 $M = \left[\frac{32}{15}a^3 + \frac{44}{45}a^3 + \frac{4}{3}a^3\ln 2a - \left(\frac{4}{3}a^3\ln 2a - \frac{4}{9}a^3\right)\right]k$

$$= \frac{32}{9}ka^3.$$

同理,可求得

$$M_y = \int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}kx\sqrt{(x-a)^2+y^2}\mathrm{d}y = -\frac{32}{45}ka^4,$$

故 $x_0 = \frac{M_y}{M} = -\frac{a}{5}.$

由对称性可知

$$y_0 = 0.$$

【4060】 确定变面积的重心曲线,其中变面积由曲线 $y = \sqrt{2px}$, $y = 0$, $x = X$ 围成.

解 变动面积的质量为

$$M = \rho\int_0^X\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y = \rho\frac{2\sqrt{2p}}{3}X^{\frac{3}{2}},$$

而一次矩

$$M_y = \rho\int_0^X x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y = \rho\frac{2\sqrt{2p}}{5}X^{\frac{5}{2}},$$

$$M_x = \rho\int_0^X \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}} y\mathrm{d}y = \rho\,\frac{p}{2}X^2,$$

于是,变动面积的重心坐标为:

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{3}{5}X, y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{3\sqrt{pX}}{4\sqrt{2}},$$

因此,重心的轨迹方程为

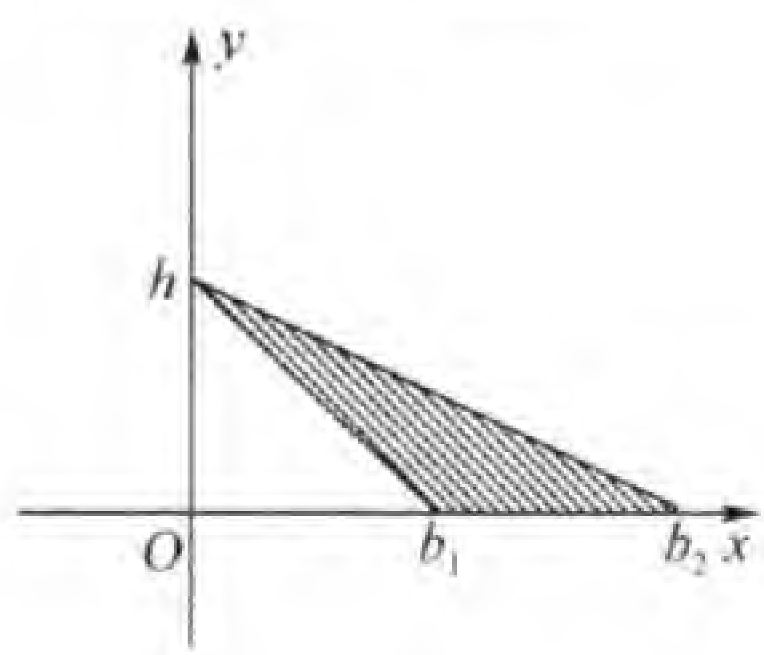
$$y_0 = \frac{3}{4\sqrt{2}}\sqrt{p\cdot\frac{5}{3}x_0} = \frac{1}{8}\sqrt{30px_0}.$$

求出由以下曲线围成的面积($\rho = 1$)对于坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量 I_x 和 I_y(4061 ～ 4065).

【4061】 $\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1, \frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1, y = 0$

$(b_1 > 0, b_2 > 0, h > 0)$.

解　设 $b_2 > b_1$,则如 4061 题图所示



4061 题图

$$I_x = \int_0^h y^2\mathrm{d}y\int_{b_1(1-\frac{y}{x})}^{b_2(1-\frac{y}{h})} \mathrm{d}x = (b_2 - b_1)\int_0^h y^2\left(1 - \frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{(b_2 - b_1)h^3}{12},$$

$$I_y = \int_0^h \mathrm{d}y\int_{b_1(1-\frac{y}{h})}^{b_2(1-\frac{y}{h})} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(b_2^3 - b_1^3)\int_0^h\left(1 - \frac{y}{h}\right)^3\mathrm{d}y$$

$$= \frac{h(b_2^3 - b_1^3)}{12}.$$

若 $b_1 > b_2$，则

$$I_x = \frac{(b_1 - b_2)h^3}{12}, I_y = \frac{h(b_1^3 - b_2^3)}{12}.$$

【4062】 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, x = 0, y = 0$

$(0 \leqslant x \leqslant a)$.

解 $I_x = \int_0^a dx \int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} y^2 dy$

$$= \frac{1}{3}\int_0^a [a^3 - 3a^2\sqrt{2ax-x^2} + 3a(2ax-x^2) - (2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[a^3x - 3a^2\left(\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{2}\right) + 3a^2x^2 - ax^3\right]\Bigg|_0^a - \frac{1}{3}\int_0^a (2ax-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= a^4\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}\int_0^a (2ax-x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$$

令 $x - a = a\sin t$，

则 $\int_0^a (2ax-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^4\cos^4 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\cos^4 t dt$

$$= a^4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}a^4.$$

所以 $I_x = a^4\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3} \times \frac{3\pi}{16}a^4 = \frac{a^4}{16}(16 - 5\pi)$.

根据图形的对称性有

$$I_y = I_x = \frac{a^4}{16}(16 - 5\pi).$$

【4063】 $r = a(1 + \cos\varphi)$.

解 曲线所界的平面域 Ω 为

$$-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi, 0 \leqslant r \leqslant a(1 + \cos\varphi),$$

$$I_x = \iint_\Omega y^2 dxdy = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2\sin^2\varphi \cdot r dr$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} a^4 (1+\cos\varphi)^4 \sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{a^4}{2} \int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^4 \sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$= 2^6 a^4 \int_0^{\pi} \cos^{10} \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= 2^6 a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} t (1-\cos^2 t) \mathrm{d}t$$

$$= 2^6 a^4 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{11}{12}\right)$$

$$= \frac{21}{32} \pi a^4,$$

$$I_y = \iint_{\Omega} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^3 \cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{a^4}{2} \int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^4 \cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{a^4}{2} \int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^4 \mathrm{d}\varphi - \frac{21}{32} \pi a^4$$

$$= 2^4 a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \mathrm{d}t - \frac{21}{32} \pi a^4$$

$$= \frac{70\pi a^4}{32} - \frac{21}{32} \pi a^4 = \frac{49}{32} \pi a^4.$$

【4064】 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

解 曲线的图形关于两坐标轴和直线 $y = x$ 对称，曲线的极坐标方程为

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

由对称性有

$$I_x = I_y,$$

所以 $$I_x = I_y = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}} r^3 \mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\frac{a^4}{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^4}{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^4}{(1-2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\mathrm{d}\varphi}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^4\mathrm{d}\varphi}{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4\varphi\right)^2}.$$

令 $t=4\varphi$,

并利用 2063 题的结果有

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^4\mathrm{d}\varphi}{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4\varphi\right)^2}=\frac{4a^4}{9}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{1}{3}\cos t\right)^2}$$

$$=\frac{4a^4}{9}\left[-\frac{\frac{1}{3}\sin t}{\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{3}\cos t\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\left(1-\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}}}\arctan\left[\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}}\tan\frac{t}{2}\right]\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{4a^4}{9}\cdot2\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}},$$

因此 $\qquad I_x=I_y=\dfrac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}.$

【4065】 $xy=a^2, xy=2a^2, x=2y, 2x=y$

$(x>0, y>0)$.

解 作变量代换

$$u=xy, v=\frac{y}{x},$$

则 $\qquad x=\sqrt{\dfrac{u}{v}}, y=\sqrt{uv}, |I|=\dfrac{1}{2v}.$

积分域 Ω 变为

$$a^2\leqslant u\leqslant 2a^2, \frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 2,$$

因此 $I_x=\iint\limits_{\Omega} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}v\int_{a^2}^{2a^2} uv\cdot\frac{1}{2v}\mathrm{d}u=\frac{9a^4}{8}$,

$$I_y=\iint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}v\int_{a^2}^{2a^2}\frac{u}{v}\cdot\frac{1}{2v}\mathrm{d}u=\frac{9a^4}{8}.$$

【4066】 求出由曲线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$围成的面积S的极力矩:$I_0=\iint\limits_{S}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 曲线的极坐标方程为

$$r^2=a^2\cos 2\varphi \qquad (\text{双纽线}).$$

利用对称性可得

$$I_0=\iint\limits_{S}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^4\cos^2 2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi a^4}{8}.$$

【4066.1】 求出由曲线$ay=x^2$,$ax=y^2(a>0)$围成的均质图形的离心转动惯量I_{xy}.

解 解方程组

$$\begin{cases}ay=x^2,\\ ax=y^2.\end{cases}$$

得两曲线的交点为$(0,0)$,(a,a),因此

$$I_{xy}=\iint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{ax}} xy\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a\left(\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{2a^2}x^5\right)\mathrm{d}x=\frac{a^4}{12}.$$

【4067】 证明公式:$I_l=I_{l_0}+Sd^2$,其中I_l,I_{l_0}为图形S对这两个平行轴l和l_0的转动惯量,其中l_0经过图形的重心而d为两条轴之间的距离.

证 取l_0轴为Ox轴,面积的重心为坐标原点,则

$$I_l=\iint\limits_{S}(y-\mathrm{d})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_S y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\mathrm{d}\iint\limits_S y\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}^2\iint\limits_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为面积的重心为坐标原点,故

$$y_0 = \frac{1}{S}\iint\limits_S y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

即 $$\iint\limits_S y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

又 $$\iint\limits_S y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_{l_0}, \iint\limits_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y = S.$$

因此 $$I_l = I_{l_0} + \mathrm{d}^2 S.$$

【4068】 证明:平面域 S 对于通过重心 $O(0,0)$ 并与 Ox 轴成 α 角的直线的转动惯量等于:

$$I = I_x\cos^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\sin^2\alpha,$$

其中 I_x 和 I_y 为域 S 对于 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量,I_{xy} 为离心惯量 $$I_{xy} = \iint\limits_S \rho xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证 取直角坐标系 uOv,使 Ou 轴与 Ox 轴的夹角为 α,则有

$$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha, v = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

这是旋转变换,且

$$|I| = 1.$$

于是 $$I = \iint\limits_S v^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_S (-x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \cos^2\alpha\iint\limits_S y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\iint\limits_S xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+ \sin^2\alpha\iint\limits_S x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= I_x\cos^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\sin^2\alpha.$$

【4069】 求边长为 a 的正三角形对于通过三角形重心并与其高成 α 角的直线的转动惯量.

解 利用上题的结果,取重心为坐标原点,不妨取 Ox 轴平行于三角形的一条边,则过重心与高成 α 角的直线,即为过坐标原点

与 Ox 轴成$\frac{\pi}{2}-\alpha$ 角的直线，于是，要求的转动惯量为

$$I_\alpha = I_x\sin^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\cos^2\alpha.$$

由于三角形三边所在的直线方程为

$$y=-\frac{a}{2\sqrt{3}}, y=-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$y=\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}},$$

所以根据对称性知

$$\begin{aligned}I_x &= 2\int_0^{\frac{a}{2}}dx\int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}}y^2dy\\ &= 2\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{1}{3}\left[\left(-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3-\left(-\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^3\right]dx\\ &= 2\int_0^{\frac{a}{2}}\left(-\sqrt{3}x^3+\sqrt{3}ax^2-\frac{\sqrt{3}}{3}a^2x+\frac{\sqrt{3}}{24}\right)dx=\frac{a^4}{32\sqrt{3}},\end{aligned}$$

$$I_{xy}=\iint\limits_S xy\,dxdy=0,$$

$$\begin{aligned}I_y &= 2\int_0^{\frac{a}{2}}dx\int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}}x^2dx=2\int_0^{\frac{a}{2}}x^2\left(-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)dx\\ &= \frac{a^4}{32\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

于是 $$I_\alpha=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}\sin^2\alpha+\frac{a^4}{32\sqrt{3}}\cos^2\alpha=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}.$$

【4070】 若水位为 $z=h$，计算水对圆柱形容器 $x^2+y^2=a^2$，$z=0$ 的侧壁($x\geqslant 0$) 的压力.

解 设 F_x，F_y 分别表示压力在Ox 与Oy 轴上的投影. 由对称性，显然有 $F_y=0$. 下面求 F_x 由于

$$dS=a\,d\theta dz\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

而在面积微元 dS 上的压力在 Ox 轴上的投影为

$$dF_x=z\cos\theta dS$$

因此 $F_x = \iint\limits_{S} z\cos\theta \mathrm{d}S = \iint\limits_{S} az\cos\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$

$$= a\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \mathrm{d}\theta\right) \cdot \left(\int_{0}^{h} z\mathrm{d}z\right) = ah^2.$$

【4071】 把半径为 a 的球沉入密度为 δ 的液体中，深度为 h(从球心计算)，这里 $h \geqslant a$. 求液体对球表面的上部和下部的压力.

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，则球面上的点(x,y,z)处沉入液体的深度 d 为

$$\mathrm{d} = h - z \qquad (-a \leqslant z \leqslant a).$$

于是，上半球面 S_1 的点和下半球面 S_2 上的点的深度分别为

$$\mathrm{d} = h - \sqrt{a^2-(x^2+y^2)},$$

及 $$\mathrm{d} = h + \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}.$$

设上半球与下半球的压力分别为 P_1 及 P_2，由对称性知压力在 Ox 轴上和 Oy 轴上的投影均为 0，设 γ 为球上各点处压力的方向(即内法线方向)与 Oz 轴正向的夹角，则有

$$P_1 = P_{1z} = \iint\limits_{S_1} \mathrm{d}\delta \cdot \cos\gamma \mathrm{d}S$$

$$= -\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \delta\left[h - \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -h\pi a^2\delta + \delta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a \sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r$$

$$= -\pi a^2\delta\left(h - \frac{2a}{3}\right) \qquad (P_1 < 0 \text{ 表示压力向下}).$$

同理，有 $P_2 = P_{2z} = \iint\limits_{S_2} \mathrm{d}\delta\cos\gamma \mathrm{d}S$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2} \delta\left[h + \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pi a^2\delta\left(h + \frac{2a}{3}\right) \qquad (P_2 > 0 \text{ 表示压力向上}).$$

【4072】 底半径等于 a 而高度为 b 的直圆柱体完全沉入密度为 δ 的液体中，其中心位于水面以下的深度为 h，而圆柱体的轴与垂线成 α 角. 确定液体对圆柱体上下底的压力.

解 取圆柱的中心为坐标原点，取 Oxy 平面为水平面，Oz 轴垂直向上，并且取圆柱的轴(朝上的方向)在 Oxy 平面上一投影所在的方向为 Ox 轴，取 Oy 轴使 Ox 轴，Oy 轴和 Oz 轴构成右手系.

因此，液面方程为 $z = h$.

设圆柱上底面为 S_1，下底面为 S_2，则 S_1 所在平面的方程为

$$x\sin\alpha + z\cos\alpha = \frac{b}{2}. \qquad ①$$

S_2 所在平面的方程为

$$x\sin\alpha + z\cos\alpha = -\frac{b}{2}. \qquad ②$$

在点 (x,y,z) 处 $(z \leqslant h)$，液体的深度为 $h - z$.

用 F_{x1}，F_{y1}，F_{z1} 分别表示液体在圆柱上底面 S_1 上的压力在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上的投影.

用 F_{x2}、F_{y2}、F_{z2} 分别表示液体在圆柱下底面 S_2 上的压力在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上的投影.

由对称性可知

$$F_{y1} = F_{y2} = 0,$$

$$F_{x1} = -\iint\limits_{S}\delta(h-z)\sin\alpha\,\mathrm{d}S = -\delta\sin\alpha\iint\limits_{S_1}(h-z)\,\mathrm{d}S, \qquad ③$$

$$F_{z1} = -\iint\delta(h-z)\cos\alpha\,\mathrm{d}S = -\delta\cos\alpha\iint\limits_{S_1}(h-z)\,\mathrm{d}S. \qquad ④$$

由 ① 式可得，在 S_1 上有

$$z = \frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{2} - x\sin\alpha\right).$$

由于 S_1 的面积为 πa^2，有

$$\iint\limits_{S_1}(h-z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_1}\left[h - \frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{2} - x\sin\alpha\right)\right]\mathrm{d}S$$

$$= \left(h - \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}\right)\iint\limits_{S_1} dS + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\iint\limits_{S_1} x dS$$

$$= \left(h - \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}\right)\pi a^2 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\iint\limits_{S_1} x dS.$$

由于$\frac{1}{\pi a^2}\iint\limits_{S_1} x dS$是$S_1$的重心的$x$坐标,也即$\frac{b}{2}\sin\alpha$,所以有

$$\iint\limits_{S_1} x dS = \frac{1}{2}\pi a^2 b \sin\alpha,$$

代入即得$\iint\limits_{S_1}(h - z)dS = \left(h - \frac{b}{2\cos\alpha}\right)\pi a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2 b \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$

$$= \left(h - \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\pi a^2.$$

将上式代入③式和④式,得

$$F_{x1} = -\pi a^2 \delta\left(h - \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha,$$

$$F_{z1} = -\pi a^2 \delta\left(h - \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha,$$

同理有 $F_{x2} = \iint\limits_{S_2} \delta(h - z)\sin\alpha dS = \delta\sin\alpha\iint\limits_{S_2}(h - z)dS,$

$$F_{z2} = \iint\limits_{S_2} \delta(h - z)\cos\alpha dS = \delta\cos\alpha\iint\limits_{S_2}(h - z)dS.$$

再由②式,并利用与计算F_{x1},F_{z1}类似的方法可计算得

$$\iint\limits_{S_2}(h - z)dS = \iint\limits_{S_2}\left[h + \frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{2} + x\sin\alpha\right)\right]dS$$

$$= \left(h + \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\pi a^2.$$

于是有 $F_{x2} = \pi a^2 \delta\left(h + \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha,$

$$F_{z2} = \pi a^2 \delta\left(h + \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha.$$

【4073】 确定均质圆柱体$x^2 + y^2 \leqslant a^2, 0 \leqslant z \leqslant h$对质点

$P(0,0,b)$ 的引力，其中圆柱体的质量等于 M，而质点的质量等于 m.

解 由题设及对称性可知，引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的投影等于零，只需计算引力在 Oz 轴上的投影 F_z. 在圆柱体上取一细圆环，其体积为

$$dV = 2\pi r dr dz,$$

其相应的质量为

$$dM = \frac{M}{\pi a^2 h} dV = \frac{2Mr}{a^2 h} dr dz.$$

dM 对质点 P 的引力为

$$dF_z = -K \frac{dM \cdot m}{[r^2 + (b-z)^2]} \cdot \frac{(b-z)}{\sqrt{r^2 + (b-z)^2}}$$

$$= -\frac{2KrmM(b-z)}{a^2 h \sqrt{[r^2 + (b-z)^2]^3}} dr dz.$$

于是，所求的引力为

$$F_z = -\frac{2KmM}{a^2 h} \int_0^h dz \int_0^a \frac{r(b-z)}{\sqrt{[r^2 + (b-z)^2]^3}} dr$$

$$= -\frac{2KmM}{a^2 h} \left[\int_0^h \operatorname{sgn}(b-z) dz - \int_0^h \frac{b-z}{\sqrt{a^2 + (b-z)^2}} dz \right]$$

$$= -\frac{2KmM}{a^2 h} [\, | b | - | b-h | + \sqrt{a^2 + (b-z)^2}$$

$$- \sqrt{a^2 + b^2}\,],$$

其中 K 为引力常数.

【4074】 物体在椭圆平台 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ 上的压力分布由下式给出：

$$p = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

确定物体在这个平台上的平均压力.

解 物体在椭圆平台上的平均压力

$$P=\frac{1}{\pi ab}\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} P_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{4}{\pi ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 P_0(1-r^2)abr\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{\pi ab}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{P_0ab}{4}=\frac{P_0}{2}.$$

【4075】 草地具有边长为 a 和 b 的矩形形状,草地上均匀覆盖着密度等于 p 千克力 $/m^2$ 的干草.若运送 P 千克草到距离为 r 的地方所需的功等于 $kPr(0<k<1)$,那么要所有的干草收集到草地中心,最少需要花费多少功?

解 取矩形中心为坐标原点,Ox 轴平行于 a 边,Oy 轴平行于 b 边,由于将面积 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 上的草移到中心所需作的功力

$$\mathrm{d}W=Kp\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由对称性可知,所要求的功为

$$W=4Kp\int_0^{\frac{b}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=4Kp\left[\int_0^{\arctan\frac{b}{a}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a}{2\cos\varphi}}r^2\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi+\int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{b}{2\sin\varphi}}r^2\,\mathrm{d}r\right]$$

$$=\frac{Kp}{6}\left[a^3\int_0^{\arctan\frac{b}{a}}\frac{1}{\cos^3\varphi}\mathrm{d}\varphi+b^3\int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^3\varphi}\mathrm{d}\varphi\right],$$

而 $$\int_0^{\arctan\frac{b}{a}}\frac{1}{\cos^3\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\left[\frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]\Bigg|_0^{\arctan\frac{b}{a}}$$

$$=\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^3\varphi}$$

$$=\left[-\frac{\cos\varphi}{2\sin^2\varphi}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{\varphi}{2}\right|\right]\Bigg|_{\arctan\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2b^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}.$$

于是可得

$$W=\frac{Kp}{12}\left(2ab\sqrt{a^2+b^2}+a^3\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right.$$
$$\left.+b^3\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right).$$

注:计算中利用了 2000 题和 1999 题的结果.

§6. 三重积分

1. **三重积分的直接计算法** 若函数 $f(x,y,z)$ 是连续的,且域 V 有界,且可用以下不等式确定:

$$x_1\leqslant x\leqslant x_2,y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),$$
$$z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),$$

其中 $y_1(x),y_2(x),z_1(x,y),z_2(x,y)$ 为连续函数,则函数 $f(x,y,z)$ 在域 V 上的三重积分可按照下式计算:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

有时采用下式也很方便:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x\iint\limits_{S(x)}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $S(x)$ 为用平面 $x=$ 常数截域 V 的断面.

2. **三重积分中的变量替换** 若 $Oxyz$ 空间的有界三维闭域 V 利用下列连续可微分函数双方单值地反应到 $O'uvw$ 空间的域 V':

$$x=x(u,v,w),y=y(u,v,w),z=z(u,v,w).$$

而且当 $(u,v,w)\in V'$ 时,函数行列式 $I=\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$, 几乎处处(指测度)保持不变符号,则下式是正确的:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_V f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|I|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

作为特殊情况,有:

① 圆柱坐标系 φ, r, h,这里:

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = h$$

和
$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)} = r.$$

② 球坐标系 φ, ψ, r,这里:

$$x = r\cos\varphi\cos\psi,\quad y = r\sin\varphi\cos\psi,\quad z = r\sin\psi$$

和
$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = r^2\cos\psi.$$

计算以下三重积分(4076 ~ 4080).

【4076】 $\iiint\limits_V xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中域 V 由曲面 $z = xy, y = x, x = 1, z = 0$ 围成.

解
$$\iiint\limits_V xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y^2\mathrm{d}y\int_0^{xy} z^3\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 x^5\int_0^x y^6\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\times\frac{1}{7}\int_0^1 x^{12}\mathrm{d}x = \frac{1}{364}.$$

【4077】 $\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$,其中域 V 由曲面 $x+y+z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ 围成.

解
$$\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\right]\Bigg|_0^{1-x-y}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{8}+\frac{1}{2(1+x+y)^2}\right]\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1\left[-\frac{1}{8}y-\frac{1}{2(1+x+y)}\right]\Bigg|_0^{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left[-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}x+\frac{1}{2(1+x)}\right]dx$$

$$=\left[-\frac{3}{8}x+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}\ln(1+x)\right]\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$$

【4078】 $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$,其中域 V 由曲面 $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0,y=0,z=0$ 围成.

解 $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$

$$=\int_0^1 x\,dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2)\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\frac{1}{2}(1-x^2)y^2-\frac{1}{4}y^4\right]\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2\,dx=\frac{1}{48}.$$

【4079】 $\iiint\limits_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz$,其中域 V 由曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 围成.

解 作变量代换

$$x=ar\cos\varphi\cos\psi,\ y=br\sin\varphi\cos\psi,\ z=br\sin\psi.$$

则 $\quad I=abcr^2\cos\psi,$

积分域 V 变为:

$$0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

因此 $\quad \iiint\limits_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 abcr^4\,dr$$

$$= \frac{4\pi}{5}abc.$$

【4080】 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中域 V 由曲面 $x^2+y^2=z^2$，$z=1$ 围成.

解 V 在 xOy 平面上的投影域 Ω 为

$$x^2+y^2 \leqslant 1.$$

因此

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2} \left[\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

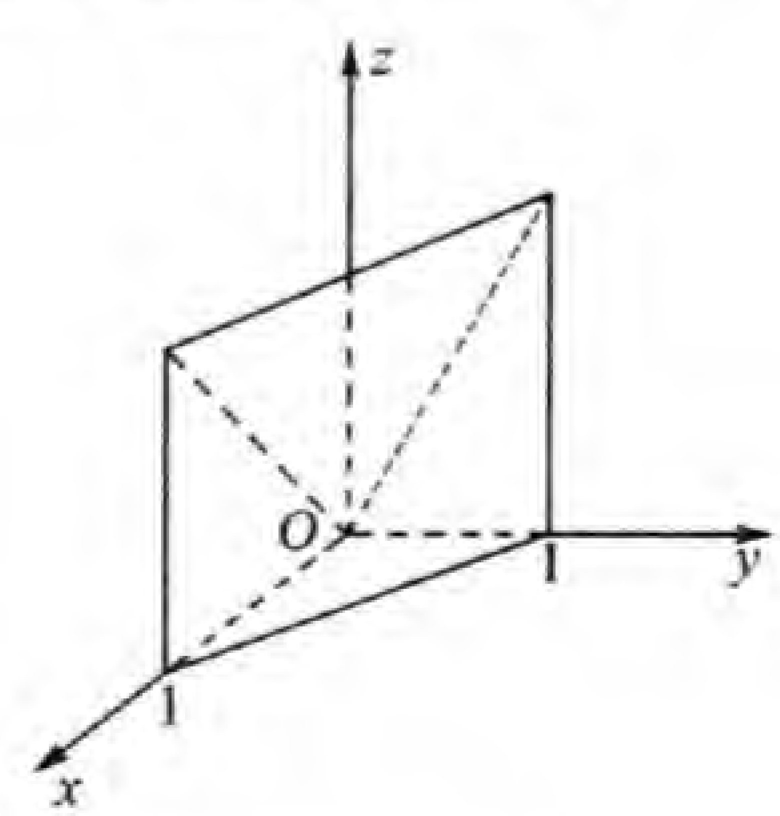
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 (r-r^2)r\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{6}.$$

在下列三重积分中用不同的方法配置积分的限(4081 ~ 4083).

【4081】 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$

解 积分域 V 如 4081 题图 1 所示

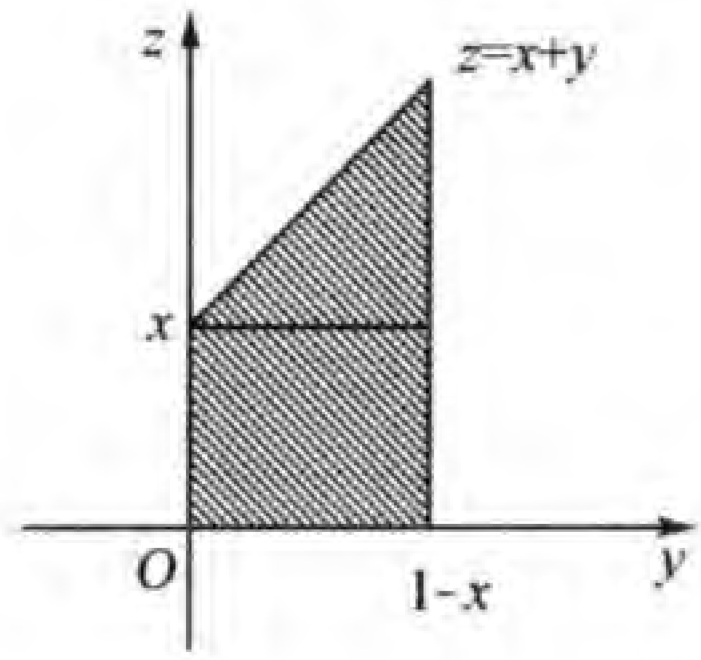


4081 题图 1

如果先对 y 积分，再对 z,x 积分，则对于固定的 x，平面 $x=$ 常数截立体所得的截面在 yOz 平面上的投影域由直线

$$z=0, z=x+y, y=0, y=1-x,$$

围成，如 4081 题图 2 所示



4081 题图 2

所以 $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$

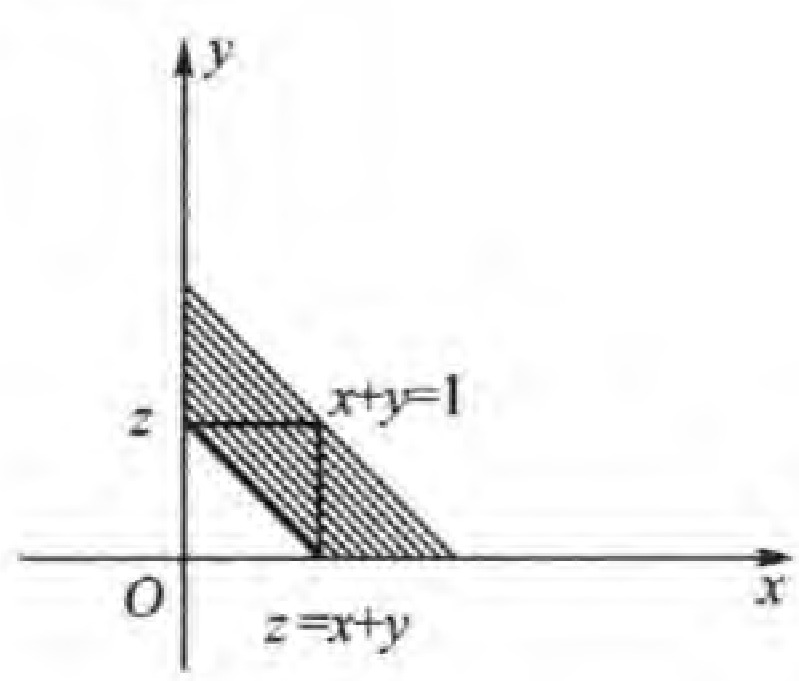
$$=\int_0^1 dx\left\{\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy+\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy\right\}.$$

$z=$ 常数，截立体所得到的截面在 xOy 平面上的投影是直线

$$x+y=1, x+y=z, x=0,$$

及 $\quad y=0,$

围成，如 4081 题图 3 所示

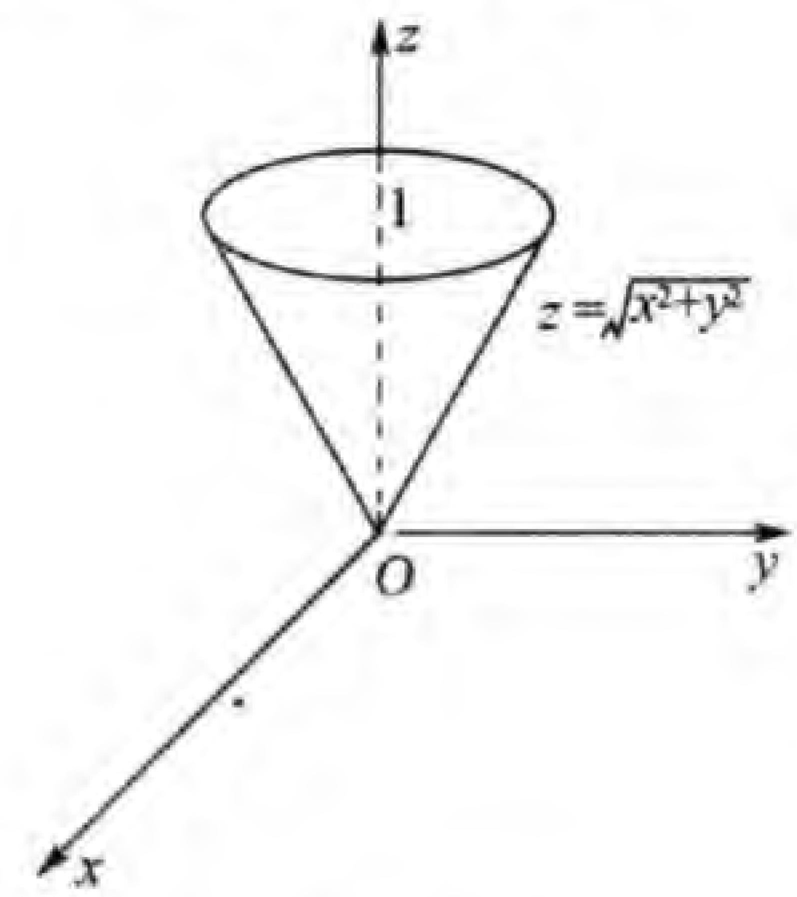


4081 题图 3

所以 $$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$$
$$=\int_0^1 dz\left\{\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx+\int_z^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx\right\}.$$

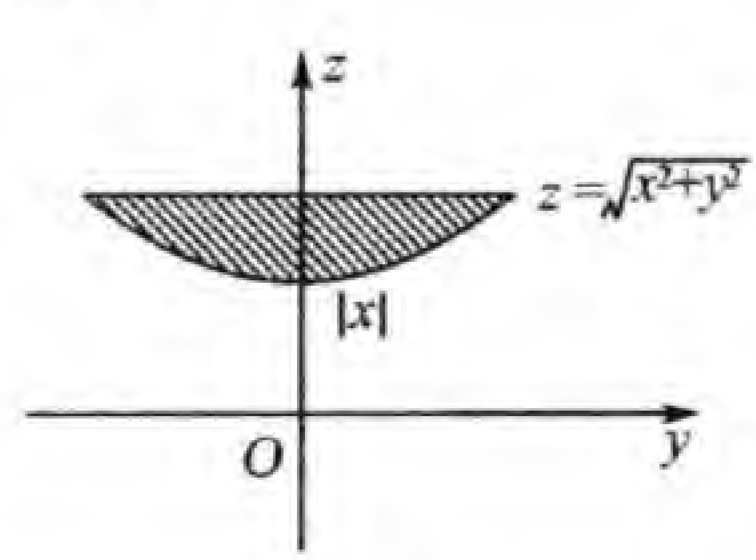
【4082】 $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz.$

解 积分域 V 如 4082 题图 1 所示



4082 题图 1

对于固定的 $x(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 有
$$|x|\leqslant z\leqslant 1,-\sqrt{z^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{z^2-x^2}.$$
如 4082 题图 2 所示



4082 题图 2

所以 $$\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz$$

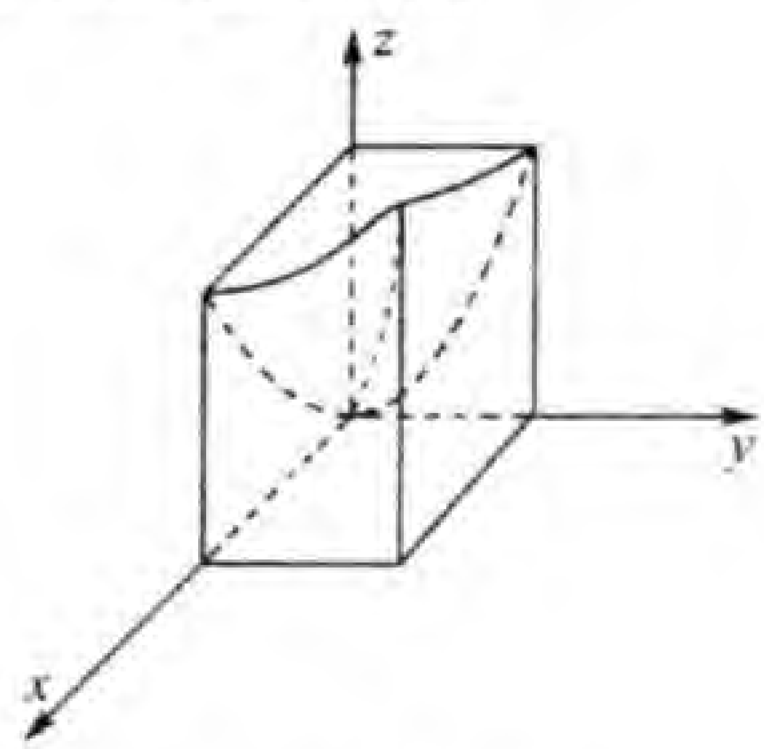
$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{|x|}^{1}dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}f(x,y,z)dy,$$

同样 $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz$

$$=\int_{0}^{1}dz\int_{-z}^{z}dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)dx.$$

【4083】 $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz.$

解 积分域如 4083 题图所示



4083 题图

对于固定的 x

当 $0\leqslant z\leqslant x^2$,有 $0\leqslant y\leqslant 1$.

当 $x^2\leqslant z\leqslant x^2+1$ 时,有

$$\sqrt{z-x^2}\leqslant y\leqslant 1,$$

所以 $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz$

$$=\int_0^1 dx\left[\int_0^{x^2}dz\int_0^1 f(x,y,z)dy+\int_{x^2}^{x^2+1}dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^{1}f(x,y,z)dy\right]$$

同样有 $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz$

$$=\int_0^1 dz\left[\int_0^{\sqrt{z}}dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^{1}f(x,y,z)dx+\int_{\sqrt{z}}^{1}dy\int_0^1 f(x,y,z)dx\right]$$

$$+\int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^1 dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx.$$

用单积分代替三重积分(4084 ~ 4085).

【4084】 $\int_0^x d\xi\int_0^\xi d\eta\int_0^\eta f(\zeta)d\zeta.$

解 $\int_0^x d\xi\int_0^\xi d\eta\int_0^\eta f(\zeta)d\zeta=\int_0^x d\xi\int_0^\xi d\zeta\int_\zeta^\xi f(\zeta)d\eta$

$$=\int_0^x d\xi\int_0^\xi f(\zeta)(\xi-\zeta)d\zeta=\int_0^x d\zeta\int_\zeta^x(\xi-\zeta)d\xi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x f(\zeta)(x-\zeta)^2 d\zeta.$$

【4085】 $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x+y} f(z)dz.$

解 交换积分顺序先对 y 积分,再对 x 积分,最后对 z 积分.将原积分分为两部分

$$\int_0^1 dz\left[\int_z^1 dx\int_0^1 f(z)dy+\int_0^z dx\int_{z-x}^1 f(z)dy\right]$$

$$=\int_0^1 dz\int_z^1 f(z)dx+\int_0^1 dz\int_0^z(1-z+x)f(z)dx$$

$$=\int_0^1 f(z)(1-z)dz+\int_0^1 f(z)(1-z)zdz+\frac{1}{2}\int_0^1 f(z)z^2dz$$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{z^2}{2}\right)f(z)dz,$$

$$\int_1^2 dz\int_{z-1}^1 dx\int_{z-x}^1 f(z)dy=\int_1^2 dz\int_{z-1}^1 f(z)(1-z+x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 f(z)(z-2)^2dz,$$

因此 $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x+y} f(z)dz$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{z^2}{2}\right)f(z)dz+\frac{1}{2}\int_1^2 f(z)(z-2)^2dz.$$

【4086】 若 $f(x,y,z)=F'''_{xyz}(x,y,z)$ 和 a,b,c,A,B,C 为常数,求$\int_a^A dx\int_b^B dy\int_c^C f(x,y,z)dz.$

解 $\int_a^A dx\int_b^B dy\int_c^C f(x,y,z)dz$

$$=\int_a^A dx\int_b^B [F''_{xy}(x,y,c)-F''_{xy}(x,y,c)]dy$$

$$=\int_a^A [F'_x(x,B,C)-F'_x(x,b,c)-F'_x(x,B,C)$$

$$+F''_x(x,b,c)]dx$$

$$=F(A,B,C)-F(a,B,C)-F(A,b,C)+F(a,b,C)$$

$$-F(A,B,c)+F(a,B,c)+F(A,b,c)-F(a,b,c).$$

变换到球坐标,计算积分(4087 ~ 4088).

【4087】 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$,其中域 V 由曲面 $x^2+y^2+z^2=z$ 围成.

解 令 $x=r\cos\varphi\cos\psi, y=r\sin\varphi\cos\psi, z=r\sin\psi$.

则曲面 $x^2+y^2+z^2=z$,

化为 $r=\sin\psi$.

从而 $V=\left\{(r,\varphi,\psi)\middle|0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant\sin\psi\right\}$,

$$|I|=r^2\cos\psi$$

因此 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\sin\psi}r\cdot r^2\cos\psi dr$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\psi\cos\psi d\psi=\frac{\pi}{10}.$$

【4088】 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dx\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2dz$.

解 积分域是由球面 $x^2+y^2+z^2=2$,及曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $x=0,y=0$ 围成,变换为球坐标则 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant\sqrt{2},$$

因此 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi\int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cdot \sin^2\psi \cdot r^2\cos\psi dr$$

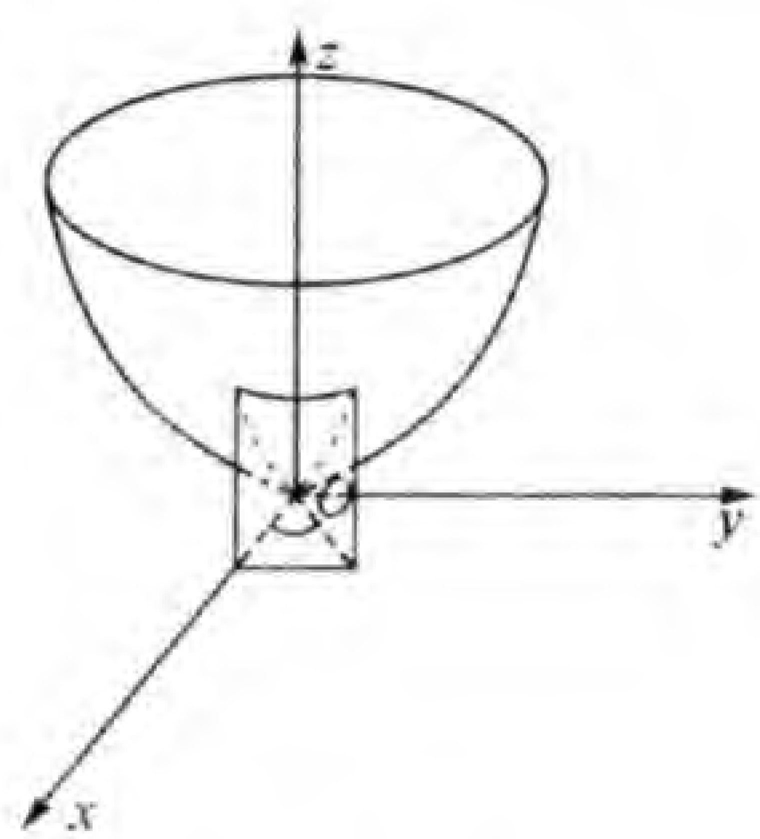
$$= \frac{4\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\psi\cos\psi d\psi = \frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$$

【4089】 在下列积分中变换到球坐标：

$$\iiint\limits_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz,$$

其中域 V 由曲面 $z=x^2+y^2, x=y, x=1, y=0, z=0$ 围成.

解 如 4089 题图所示



4089 题图

利用球面坐标，由

$$y=0, x=y, x=1$$

知 $$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4},$$

又由原点出发的射线由曲面 $z=x^2+y^2$ 进入而由平面 $x=1$ 穿出. 所以 $\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi} \leqslant r \leqslant \frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}$

而 ψ 的变化域由 $z=0, z=x^2+y^2$ 及 $x=1$ 所决定，即

$$0 \leqslant \psi \leqslant \arctan\frac{1}{\cos\varphi}.$$

事实上，在 $z=x^2+y^2$ 及 $x=1$ 的交线上有

$$r=\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}=\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi},$$

即 $$\psi=\arctan\frac{1}{\cos\varphi},$$

因此 $$\iiint_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\arctan\frac{1}{\cos\varphi}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_{\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}}r^2 f(r)\mathrm{d}r.$$

【4090】 进行相应的变量代换，计算三重积分：

$$\iiint_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 为椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 内部.

解 作变量代换

$$x=ar\cos\varphi\cos\psi,y=br\sin\varphi\cos\psi,z=cr\sin\psi.$$

则有 $$|I|=abcr^2\cos\psi,$$

积分域 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1.$

由对称性可得

$$\iiint_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 abcr^2\cos\psi\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r$$

$$=4\pi abc\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r\qquad(\text{令 } r=\sin t)$$

$$=4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi abc}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2 abc}{4}.$$

【4091】 转换为柱坐标，计算积分：

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中域 V 由曲面 $x^2+y^2=2z, z=2$ 围成.

解 令 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=z$.

则 $\quad x^2+y^2=2z,$

化为 $\quad r^2=2z,$

积分域为 $V=\left\{(r,\varphi,z)\,\middle|\,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant 2, \frac{r^2}{2}\leqslant z\leqslant 2\right\}$,

$$|I|=r,$$

因此 $$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^2\cdot r\mathrm{d}z=\frac{16\pi}{3}.$$

【4092】 计算积分 $\iiint\limits_V x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中域 V 由曲面 $z=ay^2, z=by^2, y>0(0<a<b), z=\alpha x, z=\beta x(0<\alpha<\beta), z=h(h>0)$ 围成.

解 作变换

$$u=\frac{z}{y^2}, v=\frac{z}{x}, w=z,$$

则 $$x=\frac{w}{v}, y=\sqrt{\frac{w}{u}}, z=w.$$

从而积分域变为 V:

$$a\leqslant u\leqslant b, \alpha\leqslant v\leqslant\beta, 0\leqslant w\leqslant h,$$

且

$$I=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{w}{v^2} & \frac{1}{v} \\ -\frac{\sqrt{w}}{2u^{\frac{3}{2}}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{uw}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{-w^{\frac{3}{2}}}{2v^2u^{\frac{3}{2}}},$$

因此 $$\iiint\limits_V x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_0^h w^{\frac{7}{2}}\mathrm{d}w\int_\alpha^\beta\frac{1}{v^4}\mathrm{d}v\int_a^b\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{27}h^4\sqrt{h}\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right).$$

【4093】 求积分$\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$，其中域 V 位于卦限 $x>0$，$y>0$，$z>0$ 且由曲面 $z=\frac{x^2+y^2}{m}$，$z=\frac{x^2+y^2}{n}$，$xy=a^2$，$xy=b^2$，$y=\alpha x$，$y=\beta x$（$0<a<b$；$0<\alpha<\beta$；$0<m<n$）围成.

解 作变量代换

$$u=\frac{z}{x^2+y^2},v=xy,w=\frac{y}{x}.$$

则
$$x=\sqrt{\frac{v}{w}},y=\sqrt{vw},z=uv\left(w+\frac{1}{w}\right),$$

则积分域为 V：

$$\frac{1}{n}\leqslant u\leqslant\frac{1}{m},a^2\leqslant v\leqslant b^2,\alpha\leqslant w\leqslant\beta,$$

且
$$I=\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2w^{\frac{3}{2}}}\\ 0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}}\\ v\left(w+\frac{1}{w}\right) & u\left(w+\frac{1}{w}\right) & uv\left(1-\frac{1}{w^2}\right)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{v}{2w}\left(w+\frac{1}{w}\right),$$

$$xyz=uv^2\left(w+\frac{1}{w}\right),$$

所以
$$\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}}u\,du\int_{a^2}^{b^2}v^3\,dv\int_{\alpha}^{\beta}\left(w+\frac{2}{w}+\frac{1}{w^3}\right)dw$$

$$=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right].$$

【4094】 求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在域 $x^2+y^2+z^2$

$\leqslant x+y+z$ 内的平均值.

解 域 $x^2+y^2+z^2 \leqslant x+y+z$,

即为球体 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{3}{4}$,

其体积 $V=\frac{4\pi}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

作变换 $x=r\cos\varphi\cos\psi+\frac{1}{2}, y=r\sin\varphi\cos\psi+\frac{1}{2}$,

$$z=r\sin\psi+\frac{1}{2},$$

则平均值
$$\begin{aligned}
P&=\frac{1}{V}\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r^2\cos\psi\Big(\frac{3}{4}+r^2+r\sin\psi\\
&\quad+r\cos\varphi\cos\psi+r\sin\varphi\cos\psi\Big)\mathrm{d}r\\
&=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r^2\cos\varphi\left(\frac{3}{4}+r^2\right)\mathrm{d}r\\
&=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sqrt{3}}{20}\cos\psi\mathrm{d}\psi\\
&=\frac{1}{V}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{5}\pi=\frac{2}{\sqrt{3}\pi}\cdot\frac{3\sqrt{3}\pi}{5}=\frac{6}{5}.
\end{aligned}$$

【4095】 求函数 $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$ 在域 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 内的平均值.

解 域 V

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,$$

为椭球,其体积

$$V=\frac{4\pi}{3}abc,$$

作变量代换

$$x = ar\cos\varphi\cos\psi, y = br\sin\varphi\cos\psi, z = cr\sin\psi.$$

则 $$|I| = abcr^2\cos\psi,$$

所以,平均值为

$$P = \frac{1}{V}\iiint\limits_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \frac{3}{4\pi abc}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 e^r abcr^2\cos\psi\mathrm{d}r$$

$$= \frac{3}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\right)\left(\int_0^1 r^2e^r\mathrm{d}r\right)$$

$$= \frac{3}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot 2(e-2) = 3(e-2).$$

【4096】 用中值定理,估算积分:

$$u = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

其中 $$a^2+b^2+c^2 > R^2.$$

证 由积分中值定理,有

$$u = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2}}\cdot\frac{4\pi R^3}{3}. \qquad ②$$

其中 $$x_0^2+y_0^2+z_0^2\leqslant R^2.$$

记 $$V = \{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\},$$

$$\mathrm{d}(x,y,z) = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}.$$

则 $\mathrm{d}(x,y,z)$ 表示点 (x,y,z) 到点 (a,b,c) 的距离.因此

$$\max_V \mathrm{d}(x,y,z) = \sqrt{a^2+b^2+c^2}+R,$$

$$\min_V \mathrm{d}(x,y,z) = \sqrt{a^2+b^2+c^2}-R.$$

再记 $$f(x,y,z) = \frac{1}{\mathrm{d}(x,y,z)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}.$$

则当$(x,y,z)\in V$时,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R}\leqslant f(x,y,z)\leqslant\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R},$$

所以
$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R}\leqslant f(x_0,y_0,z_0)$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R}. \qquad ②$$

下面我们证明上述不等式中等号不成立.事实上,若

$$f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R}, \qquad ③$$

令 $F(x,y,z)=f(x,y,z)-\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R}$,

则由①式及③有

$$\iiint\limits_V F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

由②有

$$F(x,y,z)\geqslant 0\qquad ((x,y,z)\in V).$$

且$F(x,y,z)$为连续函数,因此在V上$F(x,y,z)\equiv 0$这不可能,因此

$$f(x_0,y_0,z_0)>\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R},$$

同样
$$f(x_0,y_0,z_0)<\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R},$$

即
$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R$$
$$<\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2}$$
$$<\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R.$$

故
$$\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R,$$

其中
$$|\theta|<1,$$

故 $$u=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R}\qquad(-1<\theta<1).$$

【4097】 证明：若函数 $f(x,y,z)$ 在域 V 内是连续的，且对于任何域 $\omega\subset V$

$$\iiint\limits_{\omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

则当 $(x,y,z)\in V$ 时，$f(x,y,z)\equiv 0$.

证 采用反证法，若存在 $(x_0,y_0,z_0)\in V$，使得 $f(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，不妨设 $f(x_0,y_0,z_0)>0$，则由 $f(x,y,z)$ 的连续性，存在 z_0 的一个闭邻域 $\omega\subset V$，使得当 $(x,y,z)\in\omega$ 时，

$$f(x,y,z)>\frac{f(x_0,y_0,z_0)}{2}>0,$$

故 $$\iiint\limits_{\omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V>\frac{f(x_0,y_0,z_0)}{2}\cdot V_\omega>0,$$

其中 V_ω 表示 ω 的体积.

这与题设相矛盾. 因此，当 $(x,y,z)\in V$ 时，

$$f(x,y,z)\equiv 0.$$

【4098】 求 $F'(t)$，设：

(1) $$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 f 为可微分函数；

(2) $$F(t)\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t\\0\leqslant z\leqslant t}}f(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

解 (1) 作球坐标变换得

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r,$$

所以 $$F'(t)=4\pi t^2 f(t^2).$$

(2) 作变换

$$x=tu,y=tv,z=tw.$$

则积分域变为

$$0\leqslant u\leqslant 1,0\leqslant v\leqslant 1,$$

$0 \leqslant w \leqslant 1, I = t^3$,

所以 $F(t) = \iiint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant t \\ 0 \leqslant y \leqslant t \\ 0 \leqslant z \leqslant t}} f(x, y, z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= \iiint\limits_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1 \\ 0 \leqslant w \leqslant 1}} f(t^3 uvw) t^3 \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

故 $F'(t) = 3 \iiint\limits_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1 \\ 0 \leqslant w \leqslant 1}} t^2 f(t^3 uvw) \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$

$$+ 3 \iiint\limits_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1 \\ 0 \leqslant w \leqslant 1}} f'(t^3 uvw) t^5 uvw \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$= \frac{3}{t}\left[F(t) + \iiint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant t \\ 0 \leqslant y \leqslant t \\ 0 \leqslant z \leqslant t}} f'(x, y, z) xyz \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right].$$

【4099】 求:

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1} x^m y^n z^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 m, n 和 p 为非负整数.

解 分两种情况讨论

(1) 若 m, n, p 中至少有一个是奇数,例如,设 p 为奇数. 于是

$$I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1} x^m y^n z^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \\ z \geqslant 0}} x^m y^n z^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2 \\ z \leqslant 0}} x^m y^n z^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= I_1 + I_2,$$

在 I_2 中作变量代换

$$x = u, y = v, z = -w,$$

则 $\quad |I| = \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| = 1,$

且 p 为奇数,所以

$$I_2 = -\iiint\limits_{\substack{u^2+v^2+w^2\leq 1\\ w\geq 0}} u^m v^n w^p \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = -I_1,$$

因此 $\quad I = 0.$

(2) m,n,p 均为偶数，这时被积函数 $x^m y^n z^p$ 关于三个坐标平面均对称，所以

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 1} x^m y^n z^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 8\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leq 1\\ x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0}} x^m y^n z^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

作变量代换

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, y = r\sin\varphi\cos\psi, z = r\sin\psi,$$

并利用 3856 题的结果有

$$\begin{aligned} I &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\varphi\sin^n\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+n+1}\psi\sin^p\psi\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^{m+n+p+2}\mathrm{d}r \\ &= \frac{8}{m+n+p+3}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right) \\ &\quad\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{m+n+2}{2},\frac{p+1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{m+n+p+3}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)} \\ &\quad\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+p+3}{2}\right)} \\ &= \frac{2}{m+n+p+3}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+p+3}{2}\right)} \\ &= \frac{2}{m+n+p+3}\frac{\frac{(m-1)!!}{2^{\frac{m}{2}}}\cdot\frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{(p-1)!!}{2^{\frac{p}{2}}}\pi\sqrt{\pi}}{\frac{(m+n+p+1)!!}{2^{\frac{m+n+p+2}{2}}}\cdot\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi}{m+n+p+3} \cdot \frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}.$$

【4100】 假定：$x+y+z=\xi, y+z=\xi\eta, z=\xi\eta\zeta$；计算狄利克雷积分

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$(p>0, q>0, r>0, s>0),$$

其中域 V 由平面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 围成.

解 作坐标变换

$$x+y+z=u, y+z=uv, z=uvw.$$

则 $$x=u(1-v), y=uv(1-w), z=uvw.$$

故 $$|I|=u^2v,$$

积分域变为

$$0\leqslant u\leqslant 1, 0\leqslant v\leqslant 1, 0\leqslant w\leqslant 1.$$

于是

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 u^{p+q+r+2}(1-u)^s \mathrm{d}u \int_0^1 v^{q+r+1}(1-v)^p \mathrm{d}v \cdot \int_0^1 w^r (1-w)^q \mathrm{d}w$$

$$= B(p+q+r+3, s+1) \cdot B(q+r+2, p+1) \cdot B(r+1, q+1)$$

$$= \frac{\Gamma(p+q+r+3)\cdot\Gamma(s+1)\cdot\Gamma(q+r+2)\cdot\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(r+1)\cdot\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)\cdot\Gamma(p+q+r+3)\cdot\Gamma(q+r+2)}$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.$$

§7. 利用三重积分计算体积

域 V 的体积用下式表示：

$$V = \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

求由下列曲面围成的立体体积(4101 ~ 4106).

【4101】 $z=x^2+y^2, z=2x^2+2y^2, y=x, y=x^2$.

解 积分域 V 为

$$0\leqslant x\leqslant 1, x^2\leqslant y\leqslant x,$$

$$x^2+y^2\leqslant z\leqslant 2x^2+2y^2.$$

故体积为 $V=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy\int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)dy$

$$=\int_0^1\left(\frac{4}{3}x^3-x^4-\frac{1}{3}x^6\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{21}x^7\right)=\frac{3}{35}.$$

【4102】 $z=x+y,z=xy,x+y=1,x=0,y=0.$

解 积分域为

$$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x,$$

$$xy\leqslant z\leqslant x+y.$$

故体积为 $V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_{xy}^{x+y} dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y-xy)dz$

$$=\int_0^1\left[x(1-x)+\frac{(1-x)^3}{2}\right]dx=\frac{7}{24}.$$

【4103】 $x^2+z^2=a^2,x+y=\pm a,x-y=\pm a.$

解 由对称性知

$$V=8\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz$$

$$=8\int_0^a(a-x)\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=8a\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]\Bigg|_0^a+\frac{8}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{2a^3}{3}(3\pi-4).$$

【4104】 $az=x^2+y^2,z=\sqrt{x^2+y^2}\qquad(a>0).$

解 作柱面坐标变换

$$x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi,z=2.$$

则积分域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant a,\frac{r^2}{a}\leqslant z\leqslant r,$$

且 $\qquad |I|=r,$

因此 $V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a rdr\int_{\frac{r^2}{a}}^{r}dz=2\pi\int_0^a\left(r^2-\frac{r^3}{a}\right)dr=\frac{\pi a^3}{6}.$

【4105】 $az=a^2-x^2-y^2, z=a-x-y, x=0, y=0, z=0, (a>0).$

解 由

$$az=a^2-x^2-y^2, x=0, y=0, z=0.$$

所界的体积为

$$V_1=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\left(\int_0^{\frac{a^2-x^2-y^2}{a}}dz\right)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a\frac{a^2-r^2}{a}rdr$$
$$=\frac{\pi a^3}{8},$$

由 $z=a-x-y, x=0, y=0, z=0$ 所界的体积为

$$V_2=\iiint\limits_{\substack{x+y+z\leqslant a\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0}}dxdydz=\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{a-x-y}dz=\frac{a^3}{6},$$

因此,所求体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi a^3}{8}-\frac{a^3}{6}.$$

【4106】 $z=6-x^2-y^2, z=\sqrt{x^2+y^2}.$

解 利用柱面坐标

$$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=z.$$

则积分域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant 2, r\leqslant z\leqslant 6-r^2.$$

因此,体积为

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 rdr\int_r^{6-r^2}dz=2\pi\int_0^2(6r-r^2-r^3)dr=\frac{32\pi}{3}.$$

变换为球坐标或圆柱坐标,计算由下列曲面围成的立体体积(4107 ~ 4110).

【4107】 $x^2+y^2+z^2=2az, x^2+y^2\leqslant z^2.$

解 利用柱面坐标,则曲面方程为

$$r^2 + z^2 = 2az$$

及 $$r^2 = z^2,$$

它们交线在 xOy 平面上的投影为 $r = a$.

注意到 $x^2 + y^2 \leqslant z^2$，知体积的一部分为球 $r^2 + z^2 \leqslant 2az$ 的上半部分，即

$$a \leqslant z \leqslant a + \sqrt{a^2 - r^2},$$

因此，域 V 为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant a,$$

$$r \leqslant z \leqslant a + \sqrt{a^2 - r^2},$$

故体积为

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} dz$$

$$= 2\pi \int_0^r r(a + \sqrt{a^2 - r^2} - r) dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{ar^2}{2} - \frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3}\right]\Bigg|_0^a = \pi a^3.$$

【4108】 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

解 利用球面坐标，曲面方程变为

$$r^2 = a\cos 2\psi \qquad \left(-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\right),$$

利用对称性得所求体积为

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\psi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\psi}} r^2 \cos\psi dr$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\psi \cdot (\cos 2\psi)^{\frac{3}{2}} d\psi$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}} d(\sin\psi) \qquad (\text{令 } \sin\psi = t)$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2t^2)^{\frac{3}{2}} dt \qquad (\text{令} \sqrt{2}t = \sin u)$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u du = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}.$$

【4109】 $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$.

解 立体位于第一、第三、第六及第八卦限由对称性知,在每一卦限的立体体积相等,利用球面坐标得

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\sqrt[3]{3\cos^2\psi\cos\varphi\cdot\sin\varphi\sin\psi}}r^2\cos\psi\mathrm{d}r$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\sin\psi\mathrm{d}\psi$$

$$=4\left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(-\frac{1}{4}\cos^4 4\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

【4110】 $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+z^2=b^2, x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant 0)(0<a<b)$.

解 利用球面坐标,积分域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\frac{\pi}{4}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},a\leqslant r\leqslant b,$$

因此,体积为

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_a^b r^2\cos\psi\mathrm{d}r=2\pi\,\frac{1}{3}(b^3-a^3)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{3}(b^3-a^3)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)}{3}.$$

根据公式

$$\left.\begin{aligned}&x=ar\cos^\alpha\varphi\cos^\beta\psi,\\&y=br\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\psi,\\&z=cr\sin^\beta\psi\end{aligned}\right\}(a,b,c,\alpha,\beta\text{ 为为常数}),$$

引入广义坐标 r,φ 和 $\psi\left(r\geqslant 0;0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,

$$\text{且}\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=\alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

在以下例题中利用广义球坐标计算由下列曲面围成的立体体积(4111 ~ 4115).

【4111】 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$.

解 作变量代换

$$x=ar\cos\varphi\cos\psi, y=br\sin\varphi\cos\psi, z=cr\sin\psi.$$

则曲面方程变为

$$r^3=\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\psi.$$

由 $r\geqslant 0$ 得

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

所以，积分域 V 为

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$0\leqslant r\leqslant\sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\psi},$$

因此，体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\psi}}abcr^2\cos\psi\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{a^2bc}{3h}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi\mathrm{d}\psi\right)=\frac{\pi a^2bc}{3h}.\end{aligned}$$

【4112】 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$

解 作变量代换

$$x=ar\cos\varphi\cos\psi, y=br\sin\varphi\cos\psi, z=cr\sin\psi,$$

并利用对称性得体积

$$\begin{aligned}V&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\cos\psi}abcr^2\cos\psi\mathrm{d}r\\&=8\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\psi\mathrm{d}\psi\\&=\frac{4\pi}{3}abc\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2abc}{4}.\end{aligned}$$

【4112.1】 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}.$

解 作变量代换

$$x = ar\cos\varphi\cos\psi, y = br\sin\varphi\cos\psi, z = cr\sin\varphi,$$

则曲面方程变为 $r^2 = \cos 2\psi$. 由 $r^2 \geqslant 0$ 知 $-\frac{\pi}{4} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{4}$,利用对称性可得体积

$$\begin{aligned} V &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\psi \int_0^{\sqrt{\cos 2\psi}} abcr^2 \cos\psi dr \\ &= 8abc \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\psi)^{\frac{3}{2}} \cos\psi d\psi \\ &= \frac{4abc \cdot \pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}} d(\sin\psi) \qquad (令 \sin\psi = t) \\ &= \frac{4abc\pi}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2t^2)^{\frac{3}{2}} dt \qquad (令\sqrt{2}t = \sin u) \\ &= \frac{4abc\pi}{3\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u du = \frac{4abc\pi}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 abc}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

【4113】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$

解 令

$$x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi, z = z.$$

则在曲面的交线上 r 满足

$$r^4 + r^2 - 1 = 0,$$

解之得 $r = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$,

且两曲面的方程分别为

$$z = c\sqrt{1-r^2} \qquad (z \geqslant 0), z = cr^2,$$

因此体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} abr dr \int_{cr^2}^{c\sqrt{1-r^2}} dz \\ &= 2\pi abc\int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} r(\sqrt{1-r^2} - r^2) dr \end{aligned}$$

$$= 2\pi abc\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}r^4\right]\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}$$

$$= \frac{5\pi abc(3-\sqrt{5})}{12}.$$

【4114】 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^4}{c^4}=1.$

解 令 $x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi, z=z.$
则得体积为

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abr\,\mathrm{d}r\int_{-c(1-r^2)^{\frac{1}{4}}}^{c(1-r^2)^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}z = 4\pi abc\int_0^1(1-r^2)^{\frac{1}{4}}r\mathrm{d}r$$

$$= 4\pi abc\left[-\frac{2}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{4}}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{8\pi abc}{5}.$$

【4115】 $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2+\dfrac{z^4}{c^4}=1.$

解 曲面关于三个坐标平面对称. 故我们只须考虑第一卦限内的立体体积$\frac{1}{8}V$. 令

$$x=ar\cos\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi, y=br\sin\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi, z=cr\sin^{\frac{1}{2}}\psi.$$

则有 $|I|=\dfrac{1}{2}abcr^2\sin^{-\frac{1}{2}}\psi.$

曲面方程变 $r=1$,故积分域为:

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 1,$$

因此 $$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1\frac{1}{2}abcr^2\sin^{-\frac{1}{2}}\psi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{3}\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{-\frac{1}{2}}\psi\mathrm{d}\psi.$$

利用 3856 题的结果及 Gamma 函数的余元公式,有

$$V=\frac{2}{3}\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{-\frac{1}{2}}\psi\mathrm{d}\psi=\frac{2}{3}\pi abc\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi abc}{3}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{\pi abc}{3}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$= \frac{\pi abc}{3} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\pi}$$

$$= \frac{1}{3}abc \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

利用合适的变量代换,计算由下列曲面围成的立体体积(设参数为正数)(4116 ~ 4124).

【4116】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{h}+\frac{y}{k}$

$$(x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0).$$

解 令

$$x = ar\cos^2\varphi\cos^2\psi, \quad y = br\sin^2\varphi\cos^2\psi, \quad z = cr\sin^2\psi,$$

则有 $\quad |I| = 4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi \cdot \sin\psi.$

且积分域为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leqslant r \leqslant \left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi + \frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi,$$

因此,体积为

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi} 4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi dr$$

$$= \frac{4}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi + \frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)^3 d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9\psi\sin\psi d\psi$$

$$= \frac{2}{15}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\left[\frac{a}{h} + \left(\frac{b}{k} - \frac{a}{h}\right)\sin^2\varphi\right]^3 d\varphi$$

$$= \frac{2}{15}abc \frac{1}{2\left(\frac{b}{k}-\frac{a}{h}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{a}{h} + \left(\frac{b}{k}-\frac{a}{h}\right)\sin^2\varphi\right]^3 d\left[\frac{a}{h} + \left(\frac{b}{k}-\frac{a}{h}\right)\sin^2\varphi\right]$$

$$= \frac{2}{15}abc \frac{1}{2\left(\frac{b}{k}-\frac{a}{h}\right)} \cdot \frac{1}{4}\left[\frac{a}{h} + \left(\frac{b}{k}-\frac{a}{h}\right)\sin^2\varphi\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{abc}{60} \cdot \frac{1}{\left(\frac{b}{k}-\frac{a}{h}\right)}\left[\left(\frac{b}{k}\right)^4 - \left(\frac{a}{h}\right)^4\right]$$

$$=\frac{abc}{60}\cdot\left(\frac{b}{k}+\frac{a}{h}\right)\left(\frac{b^2}{k^2}+\frac{a^2}{h^2}\right).$$

【4116.1】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$

$(x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0).$

解 令

$$x=ar\cos^2\varphi\cos^2\psi,y=br\sin^2\varphi\cos^2\psi,z=cr\sin^2\varphi.$$

则有 $|I|=4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi.$

积分域为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0,0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$0\leqslant r\leqslant\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi-\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi,$$

其中 $\varphi_0=\arctan\sqrt{\frac{bh}{ak}}$,

因此,体积为

$$V=\int_0^{\varphi_0}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi-\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi}4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi dr$$

$$=\frac{4}{3}abc\int_0^{\varphi_0}\cos\varphi\sin\varphi\left[\frac{a}{k}\cos^2\varphi-\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right]^3d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9\psi\sin\psi d\psi$$

$$=\frac{2}{15}abc\int_0^{\varphi_0}\cos\varphi\sin\varphi\left[\frac{a}{h}-\left(\frac{b}{k}+\frac{a}{h}\right)\sin^2\varphi\right]^3d\varphi$$

$$=\frac{2}{15}abc\frac{1}{-2\left(\frac{b}{k}+\frac{a}{h}\right)}\int_0^{\varphi_0}\left[\frac{a}{h}-\left(\frac{b}{k}+\frac{a}{h}\right)\sin^2\varphi\right]^3d\left[\frac{a}{h}-\left(\frac{b}{k}+\frac{a}{h}\right)\sin^2\varphi\right]$$

$$=\frac{2}{15}abc\cdot\frac{1}{-2\left(\frac{b}{k}+\frac{a}{h}\right)}\cdot\frac{1}{4}\left[\frac{a}{h}-\left(\frac{b}{k}+\frac{a}{h}\right)\sin^2\varphi\right]^4\Bigg|_0^{\varphi_0}$$

$$=\frac{abc}{60}\frac{1}{\frac{b}{k}+\frac{a}{h}}\cdot\left[\left(\frac{a}{h}\right)^4-\left(\frac{b}{k}\right)^4\right]$$

$$=\frac{abc}{60}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\left(\frac{a}{h}-\frac{b}{k}\right).$$

【4117】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^4=\frac{xyz}{abc}$

$(x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$.

解 令

$$x=ar\cos^2\varphi\cos^2\psi,\quad y=br\sin^2\varphi\cos^2\psi,\quad z=cr\sin^2\psi$$

则有 $\quad |I|=4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi$,

且积分域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$0\leqslant r\leqslant\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos^4\psi\sin^2\psi,$$

因此,体积为

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos^4\psi\sin^2\psi}4abcr^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi dr$$

$$=\frac{4}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\cdot\sin^7\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{15}\psi\sin^7\psi d\psi$$

$$=\frac{4}{3}abc\cdot\frac{1}{2}B(4,4)\cdot\frac{1}{2}(8,4)$$

$$=\frac{abc}{3}\cdot\frac{\Gamma(4)\cdot\Gamma(4)}{\Gamma(8)}\cdot\frac{\Gamma(8)\cdot\Gamma(4)}{\Gamma(12)}$$

$$=\frac{abc}{3}\cdot\frac{(3!)^3}{11!}=\frac{abc}{554400}.$$

【4118】 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1\quad(x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$.

解 令

$$x=ar\cos^2\varphi\cos\psi, y=br\sin^2\varphi\cos\psi, z=cr\sin\psi.$$

则有 $\quad |I|=2abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi$,

且积分域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 1,$$

因此,体积为

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 2abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cdot\cos\psi dr$$

$$=\frac{2abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi=\frac{abc}{3}.$$

【4118.1】 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{x}{a}}=1$

$$(x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0).$$

解 令

$$x=ar\cos^4\varphi\cos^4\psi,\quad y=br\sin^4\varphi\cos^4\psi,\quad z=cr\sin^4\psi.$$

则 $$|I|=16abcr^2\cos^3\varphi\sin^3\varphi\cos^7\psi\sin^3\psi,$$

且积分域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1,$$

因此,体积为

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 16abcr^2\cos^3\varphi\sin^3\varphi\cos^7\psi\sin^3\psi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{16abc}{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\psi\sin^3\psi\mathrm{d}\psi$$

$$=\frac{16abc}{3}\cdot\frac{1}{2}B(2,2)\cdot\frac{1}{2}B(4,2)$$

$$=\frac{4abc}{3}\cdot\frac{\Gamma(2)\cdot\Gamma(2)}{\Gamma(4)}\cdot\frac{\Gamma(4)\Gamma(2)}{\Gamma(6)}$$

$$=\frac{4abc}{3}\cdot\frac{1}{5!}=\frac{abc}{90}.$$

【4118.2】 $\sqrt[3]{\frac{x}{a}}+\sqrt[3]{\frac{y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{z}{c}}=1$

$$(x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0).$$

解 令

$$x=ar\cos^6\varphi\cdot\cos^6\psi,y=br\sin^6\varphi\cos^6\psi,$$
$$z=cr\sin^6\psi.$$

则 $$|I|=36abcr^2\cdot\cos^5\varphi\cdot\sin^5\varphi\cos^{11}\psi\sin^5\psi,$$

且积分域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1,$$

因此,体积为

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 36abcr^2\cdot\cos^5\varphi\sin^5\varphi\cos^{11}\psi\sin^5\psi\mathrm{d}r$$

$$=12abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin^5\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{11}\psi\cdot\sin^5\psi\mathrm{d}\psi$$

$$=12abc\cdot\frac{1}{2}B(3,3)\cdot\frac{1}{2}B(3,6)$$

$$=3abc\cdot\frac{\Gamma(3)\Gamma(3)}{\Gamma(6)}\cdot\frac{\Gamma(3)\cdot\Gamma(6)}{\Gamma(9)}=3abc\,\frac{2^3}{8!}=\frac{abc}{1680}.$$

【4118.3】 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$

解 曲面关于三个坐标平面对称,因此我们只要求第一卦限内的立体体积,令

$$x=ar\cos^3\varphi\cos^3\psi,y=br\sin^3\varphi\cos^3\psi,z=cr\sin^3\psi.$$

则 $$|I|=9abcr^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cdot\cos^5\psi\cdot\sin^2\psi.$$

积分域 V_1 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1,$$

因此,体积为

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 9abcr^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos^5\psi\sin^2\psi\mathrm{d}r$$

$$=3abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\psi\sin^2\psi\mathrm{d}\psi\right)$$

$$=3abc\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2},3\right)$$

$$=\frac{3abc}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}$$

$$=\frac{3abc}{4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\right)^3}{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2^4}\cdot\sqrt{\pi}}=\frac{abc\pi}{70}$$

注:运算中利用了公式

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

【4119】 $z=x^2+y^2, z=2(x^2+y^2), xy=a^2, xy=2a^2, x=2y, 2x=y \quad (x>0, y>0)$.

解 令

$$u=\frac{z}{x^2+y^2}, v=xy, w=\frac{x}{y}.$$

则 $$x=\sqrt{vw}, y=\sqrt{\frac{v}{w}}, z=u\left(vw+\frac{v}{w}\right).$$

变换的雅可比行列式为

$$I=\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} \\ 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{vw}} & -\dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w^3}} \\ vw+\dfrac{v}{w} & u\left(w+\dfrac{1}{w}\right) & u\left(v-\dfrac{v}{w^2}\right) \end{vmatrix}$$

$$=-\left(\frac{v}{2}+\frac{v}{2w^2}\right),$$

且积分域 V 为

$$1\leqslant u\leqslant 2, a^2\leqslant v\leqslant 2a^2, \frac{1}{2}\leqslant w\leqslant 2,$$

因此,体积为

$$V=\int_1^2 du\int_{a^2}^{2a^2} dv\int_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{v}{2}+\frac{v}{2w^2}\right)dw$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_1^2 du\right)\left(\int_{a^2}^{2a^2} v dv\right)\left(\int_{\frac{1}{2}}^2\left(1+\frac{1}{w^2}\right)dw\right)=\frac{9a^4}{4}.$$

【4120】 $x^2+z^2=a^2, x^2+z^2=b^2, x^2-y^2-z^2=0 \quad (x>0)$.

解 令 $x=r\cos\varphi, y=y, z=r\sin\varphi$.

则 $$|I|=r,$$

积分域 V 为

$$a\leqslant r\leqslant b, -\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},$$

$$-r\sqrt{\cos2\varphi}\leqslant y\leqslant r\sqrt{\cos2\varphi},$$

因此,体积为

$$V=\int_a^b r\,\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_{-r\sqrt{\cos2\varphi}}^{r\sqrt{\cos2\varphi}}\mathrm{d}y=\int_a^b r^2\,\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2\sqrt{\cos2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{4}{3}(b^3-a^3)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\frac{2}{3}(b^3-a^3)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}(b^3-a^3)\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{3}(b^3-a^3)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}=\frac{1}{3}(b^3-a^3)\cdot\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$=\frac{4}{3}(b^3-a^3)\frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{2}\pi}=\frac{2}{3}(b^3-a^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right),$$

注:利用了余元公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

【4121】 $(x^2+y^2+z^2)^3=\dfrac{a^6z^2}{x^2+y^2}.$

解 由对称性知,我们只要考虑第一封限内的立体,利用球坐标:

$$x=r\cos\varphi\cos\psi, y=r\sin\varphi\cos\psi, z=r\sin\psi.$$

则 $\quad |I|=r^2\cos\psi,$

积分域 V_1 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant a\tan^{\frac{1}{3}}\psi,$$

因此,所求体积为

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{a\tan^{\frac{1}{3}}\psi} r^2 \cos\psi dr$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi d\psi = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

【4122】 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{z}{h}\cdot e^{\frac{-\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$.

解 由于 $z \geqslant 0$，故立体在 xOy 平面的上方，再由对称性知，我们只要求出第一卦限内立体的体积，然后再乘以 4，令

$$x = ar\cos\varphi\cos\psi, y = br\sin\varphi\cos\psi, z = cr\sin\psi.$$

积分域 V_1 为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leqslant r \leqslant \left(\frac{c}{h}\sin\psi e^{-\sin^2\psi}\right)^{\frac{1}{3}},$$

因此，所求立体的体积为

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\left(\frac{c}{h}\sin\psi\cdot e^{-\sin^2\psi}\right)^{\frac{1}{3}}} abcr^2\cos\psi dr$$

$$= \frac{4abc^2}{3h}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\cos\psi\cdot e^{-\sin^2\psi} d\psi$$

$$= -\frac{\pi abc^2}{3h} e^{-\sin^2\psi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi abc^2}{3h}(1-e^{-1}).$$

【4123】 $\dfrac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)$.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1, x = 0, x = a.$$

解 令

$$u = \frac{x}{a}, v = \frac{x}{a}+\frac{y}{b}, w = \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}.$$

则有 $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\frac{1}{abc}$.

从而 $|I|=abc$.

积分域 V 为

$$0\leqslant u\leqslant 1,\frac{2}{\pi}w\arcsin w\leqslant v\leqslant 1,$$

$$-1\leqslant w\leqslant 1,$$

事实上,由 $\frac{2}{\pi}w\arcsin w\leqslant 1$,

可得 $-1\leqslant w\leqslant 1$,

因此,所求体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1 \mathrm{d}u\int_{-1}^1 \mathrm{d}w\int_{\frac{2}{\pi}w\arcsin w}^1 abc\,\mathrm{d}v\\&=2abc\int_0^1\left(1-\frac{2}{\pi}w\arcsin w\right)\mathrm{d}w\\&=2abc-\frac{2abc}{\pi}\int_0^1\arcsin w\,\mathrm{d}(\omega^2)\\&=2abc-\frac{2abc}{\pi}w^2\arcsin w\Big|_0^1+\frac{2abc}{\pi}\int_0^1 w^2(1-w^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}w\\&=abc+\frac{abc}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\\&=abc+\frac{abc}{\pi}B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\\&=abc+\frac{abc}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)}\\&=abc+\frac{abc}{\pi}\frac{\frac{1}{2}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{1!}\\&=abc+\frac{abc}{\pi}\cdot\frac{(\sqrt{\pi})^2}{2}=\frac{3abc}{2}.\end{aligned}$$

【4124】 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\ln\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$,

$$x=0,z=0,$$

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0,\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

解　令

$$u=\frac{x}{a},v=\frac{x}{a}+\frac{y}{b},w=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}.$$

则　　$|I|=abc.$

曲面方程$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\ln\dfrac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$,

变为 $v=we^{-w}$,平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$变为$w=1$,$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$变为$u=w$,$x=0$变为$u=0$,$z=0$变为$v=w$.因此,积分域为

$$0\leqslant u\leqslant w,we^{-w}\leqslant v\leqslant w,0\leqslant w\leqslant 1,$$

故体积为

$$V=\int_0^1 dw\int_0^w du\int_{we^{-w}}^w abc\,dv=abc\int_0^1(w^2-w^2e^{-w})dw$$

$$=5abc\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{3}\right).$$

【4125】　曲面$x^2+y^2+az=4a^2$将球$x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$分成两部分的体积的比值是多少?

解　曲面$x^2+y^2+az=4a^2$与球面$x^2+y^2+(z-2a)^2=4a^2$有交线为圆周

$$\begin{cases}x^2+y^2=3a^2,\\ z=a.\end{cases}$$

且有公共的顶点$(0,0,4a)$,因此,球内位于曲面$x^2+y^2+az=4a^2$下方部分的体积为

$$V_1=\int_0^a dz\Big(\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4az-z^2}dxdy\Big)+\int_a^{4a}dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4a^2-az}dxdy$$

$$=\int_0^a\pi(4az-z^2)dz+\int_a^{4a}\pi(4a^2-az)dz$$

$$=\pi\left(2az^2-\frac{1}{3}z^3\right)\Big|_0^a+\pi\left(4a^2z-\frac{a}{2}z^2\right)\Big|_a^{4a}=\frac{37}{6}\pi a^3.$$

从而,另一部分的体积为

$$V_2=V-V_1=\frac{4}{3}\pi(2a)^3-\frac{37}{6}\pi a^3=\frac{27}{6}\pi a^3,$$

因此 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{37}{27}.$

【4126】 求由下列曲面

$$x^2+y^2=az,z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\quad(a>0),$$

所围的立体体积和表面积.

解 两曲面的交线为圆周

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z=a.\end{cases}$$

又曲面的顶点为$(0,0,2a)$,所以体积为

$$V=\int_0^a dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant az}dxdy+\int_a^{2a}dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant(2a-z)^2}dxdy$$

$$=\int_0^a az\pi dz+\int_a^{2a}(2a-z)^2\pi dz$$

$$=\frac{\pi}{2}a^3+\frac{\pi a^3}{3}=\frac{5\pi a^3}{6}.$$

对于曲面 $x^2+y^2=az$,有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2},$$

对于曲面 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$,有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=\sqrt{2},$$

所以,曲面的表面积为

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}dxdy+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{2}dxdy$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\sqrt{a^2+4r^2}\cdot r\mathrm{d}r+\sqrt{2}\pi a^2$$

$$=\frac{1}{a}\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{1}{12}(a^2+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a\right)+\sqrt{2}\pi a^2$$

$$=\frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1).$$

【4127】 若

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0,$$

求由平面 $a_ix+b_iy+c_iz=\pm h_i(i=1,2,3)$ 所围的平行六面体的体积.

解 令

$$u=a_1x+b_1y+c_1z,v=a_2x+b_2y+c_2z,$$
$$w=a_3x+b_3y+c_3z.$$

则有 $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\Delta,\ |I|=\dfrac{1}{|\Delta|},$

积分域 V 变为

$$-h_1\leqslant u\leqslant h_1,-h_2\leqslant v\leqslant h_2,$$
$$-h^3\leqslant w\leqslant h_3,$$

因此,体积

$$V=\int_{-h_1}^{h_1}\mathrm{d}u\int_{-h_2}^{h_2}\mathrm{d}v\int_{-h_3}^{h_3}\frac{1}{|\Delta|}\mathrm{d}w=\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}.$$

【4128】 若

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0,$$

求由曲面 $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2$ 所围的立体体积.

解 令

$$u=a_1x+b_1y+c_1z,v=a_2x+b_2y+c_2z,$$

$$w = a_3 x + b_3 y + c_3 z.$$

则有 $\quad |I| = \dfrac{1}{|\Delta|}$,

积分域 V 为

$$u^2 + v^2 + w^2 \leqslant h^2,$$

因此,所求体积为

$$V = \frac{1}{|\Delta|}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}.$$

【4129】 求由曲面

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n + \frac{z^{2n}}{c^{2n}} = \frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2} \qquad (n>1).$$

围成的立体体积.

解 显然 $z \geqslant 0$,且曲面关于 xOz,yOz 平面对称. 故我们只须考虑第一卦限内的立体. 令

$$x = ar\cos\varphi\cos\psi, y = br\sin\varphi\cos\psi, z = cr\sin\psi.$$

则有 $\quad |I| = abcr^2\cos\psi$,

且积分域为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leqslant r \leqslant \sqrt[3]{\frac{c}{h}\,\frac{\sin\psi\cos^{2n-4}\psi}{\cos^{2n}\psi+\sin^{2n}\psi}},$$

因此,所求体积为

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\sqrt[3]{\frac{c}{h}\frac{\sin\psi\cos^{2n-4}\psi}{\cos^{2n}\psi+\sin^{2n}\psi}}} abcr^2\cos\psi\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2\pi}{3h}abc^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\psi\cos^{2n-3}\psi}{\cos^{2n}\psi+\sin^{2n}\psi}\mathrm{d}\psi \qquad (\text{令 } \cos\psi = t)$$

$$= \frac{2\pi}{3h}abc^2\int_0^1\frac{t^{2n-3}}{t^{2n}+(1-t^2)^n}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{\pi}{3h}abc^2\int_0^1\frac{t^{2n-4}\mathrm{d}(1-t^2)}{t^{2n}+(1-t^2)^n} \qquad (\text{令 } 1-t^2 = x)$$

$$=\frac{\pi}{3h}abc^2\int_0^1\frac{(1-x)^{n-2}\mathrm{d}x}{(1-x)^n+x^n}=\frac{\pi}{3h}abc^2\int_0^1\frac{\frac{1}{(1-x)^2}\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^n}$$

令 $u=\frac{x}{1-x}$.

并利用3851题的结果有

$$\int_0^1\frac{\frac{1}{(1-x)^2}\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^n}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}},$$

因此 $V=\frac{\pi^2abc^2}{3nh\cdot\sin\frac{\pi}{n}}$.

【4130】 求位于空间$Oxyz$的正卦限($x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$)且由曲面$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^p}{c^p}=1(m>0,n>0,p>0)$,$x=0,y=0$,$z=0$所围的立体体积.

解 令

$$x=ar^{\frac{2}{m}}\cos^{\frac{2}{m}}\varphi\cos^{\frac{2}{m}}\psi,y=br^{\frac{2}{n}}\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi,z=cr^{\frac{2}{p}}\sin^{\frac{2}{p}}\psi$$

则有

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=\frac{8abc}{mnp}\cdot r^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1}\cos^{\frac{2}{m}-1}\varphi\cdot\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cdot\cos^{\frac{2}{m}+\frac{4}{n}-1}\psi\cdot\sin^{\frac{2}{p}-1}\psi,$$

积分域为:$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant1$,

因此,所求体积为

$$V=\frac{8abc}{mnp}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{m}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\psi$$

$$\cdot\sin^{\frac{2}{p}-1}\psi\mathrm{d}\psi\cdot\int_0^1 r^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8abc}{mnp}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n},\frac{1}{p}\right)$$

$$\cdot \frac{1}{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}}$$

$$=\frac{abc}{mn+np+mp}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}$$

$$=\frac{abc}{mn+np+mp}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}.$$

§8. 三重积分在力学上的应用

1. **物体的质量**　若一物体占有体积 V 且 $\rho=\rho(x,y,z)$ 为在点 (x,y,z) 的密度，则物体的质量等于

$$M=\iiint\limits_{V}\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{1}$$

2. **物体的重心**　物体的重心坐标 x_0,y_0,z_0 按照下式计算：

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{1}{M}\iiint\limits_{V}\rho x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\\ y_0=\dfrac{1}{M}\iiint\limits_{V}\rho y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\\ z_0=\dfrac{1}{M}\iiint\limits_{V}\rho z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{cases} \tag{2}$$

若物体是均质的，则公式 ① 和 ② 中可以假定 $\rho=1$.

3. **转动惯量**　以下积分对应地被称为物体对坐标平面的转动惯量：$I_{xy}=\iiint\limits_{V}\rho z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$I_{yz}=\iiint\limits_{V}\rho x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

$$I_{zx} = \iiint\limits_V \rho y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

以下积分被称为物体对某个轴线的转动惯量：

$$I_l = \iiint\limits_V \rho r^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 r 为物体变点(x,y,z)到轴线 l 的距离.

特别是对于坐标轴 Ox,Oy 和 Oz 来说,相应地具有：

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, I_y = I_{yx} + I_{yz}, I_z = I_{zx} + I_{zy}.$$

以下积分被称为物体对坐标起点的转动惯量：

$$I_0 = \iiint\limits_V \rho(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

显然,有 $I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}$.

4. **引力场的势** 以下积分被称为物体在 $P(x,y,z)$ 点的牛顿势：

$$u(x,y,z) = \iiint\limits_V \rho(\xi,\eta,\zeta)\, \frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r},$$

其中 V 为物体体积,$\rho = \rho(\xi,\eta,\zeta)$ 为物体的密度,且

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

质量 m 的质点被物体以力量 $F = (X,Y,Z)$ 所吸引,引力在坐标轴 Ox,Oy,Oz 的投影 X,Y,Z 等于

$$X = km\frac{\partial u}{\partial x} = km\iiint\limits_V \rho\, \frac{\xi - x}{r^3}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

$$Y = km\frac{\partial u}{\partial y} = km\iiint\limits_V \rho\, \frac{\eta - y}{r^3}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

$$Z = km\frac{\partial u}{\partial z} = km\iiint\limits_V \rho\, \frac{\zeta - z}{r^3}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

其中 k 为引力定律常数.

【4131】 若物体在 $M(x,y,z)$ 点的密度用公式 $\rho = x + y + z$ 给出,求占单位体积 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$ 的物体质量.

解 质量

$$M=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (x+y+z)dz=\frac{3}{2}.$$

【4132】 若物体密度按照规律 $\rho=\rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 变化，这里 $\rho_0>0$ 及 $k>0$ 为常数，求充满无穷域 $x^2+y^2+z^2\geqslant 1$ 的物体质量.

解 利用球坐标

$$\begin{aligned}M&=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant 1}\rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz\\&=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{+\infty}\rho_0 e^{-kr}\cdot r^2\cos\psi dr\\&=4\pi\rho_0\int_1^{+\infty}r^2e^{-kr}dr\\&=4\pi\rho_0\left(-\frac{r^2}{k}-\frac{2r}{k^2}-\frac{2}{k^3}\right)e^{-kr}\Big|_1^{+\infty}\\&=4\pi\rho_0 e^{-k}\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right).\end{aligned}$$

求由下列曲面所围的均质物体的重心坐标(4133 ~ 4141).

【4133】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}, z=c.$

解 作变量代换

$$x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi, z=z.$$

则 $$|I|=abr.$$

积分域为 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\frac{z}{c}, 0\leqslant z\leqslant c.$

从而，质量为

$$M=ab\int_0^c dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{z}{c}}rdr=\frac{\pi abc}{3}.$$

设重心为(x_0,y_0,z_0)，由对称性知 $x_0=y_0=0$，而

$$z_0=\frac{1}{M}ab\int_0^c zdz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{z}{c}}rdr=\frac{3}{\pi abc}\cdot\frac{\pi abc^2}{4}=\frac{3c}{4},$$

所以，重心为$\left(0,0,\frac{3c}{4}\right)$.

【4134】 $z=x^2+y^2, x+y=a, x=0, y=0, z=0$.

解 物体的质量为

$$M=\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy\int_0^{x^2+y^2} dz=\frac{1}{6}a^4.$$

重心坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^a x dx\int_0^{a-x} dy\int_0^{x^2+y^2} dz=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{a^5}{15}=\frac{2a}{5},$$

$$y_0=\frac{1}{M}\int_0^a dx\int_0^{a-x} y dy\int_0^{x^2+y^2} dz=\frac{2a}{5},$$

$$\begin{aligned}z_0&=\frac{1}{M}\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy\int_0^{x^2+y^2} z dz\\&=\frac{1}{M}\int_0^a dx\int_0^{a-x}\frac{1}{2}(x^4+2x^2y^2+y^4)dy\\&=\frac{1}{M}\int_0^a\left(\frac{a^5}{10}-\frac{1}{2}a^4x+\frac{4}{3}a^2x^2-2a^2x^3+2ax^4-\frac{14}{15}x^5\right)dx\\&=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{7}{180}a^6=\frac{7}{30}a^2.\end{aligned}$$

【4135】 $x^2=2pz, y^2=2px, x=\frac{p}{2}, z=0$.

解 质量为

$$M=\int_0^{\frac{p}{2}} dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy\int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{\frac{p}{2}} x^{\frac{5}{2}} dx=\frac{p^3}{28}.$$

重心坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{p}{2}} x dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy\int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz=\frac{28}{p^3}\cdot\frac{p^4}{72}=\frac{7}{18}p,$$

$$y_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{p}{2}} dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} y dy\int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz=0,$$

$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{p}{2}} dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy\int_0^{\frac{x^2}{2p}} z dz=\frac{28}{p^3}\cdot\frac{p^4}{704}=\frac{7}{176}p.$$

【4136】 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0.$

解 令

$$x=ar\cos\varphi\cos\psi, y=br\sin\varphi\cos\psi, z=cr\sin\psi.$$

则 $$I=abcr^2\cos\psi.$$

积分域为 $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}, 0\leqslant\psi\leqslant\dfrac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 1,$

所以，质量为

$$M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}4\int_0^1 abcr^2\cos 4\mathrm{d}r=\frac{1}{6}\pi abc.$$

重心坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 abcr^2\cos\psi\cdot ar\cos\varphi\cos\psi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 a^2bcr^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{6}{\pi abc}\cdot\frac{\pi a^2bc}{16}=\frac{3}{8}a.$$

由对称性知 $y_0=\dfrac{3}{8}b, z_0=\dfrac{3}{8}c.$

【4137】 $x^2+z^2=a^2, y^2+z^2=a^2 \quad (z\geqslant 0).$

解 物体的质量为

$$M=\int_0^a\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^a(a^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{8a^3}{3}.$$

重心坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^a\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}x\mathrm{d}x=0,$$

同样 $$y_0=0,$$

$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^a z\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^a 4z(a^2 - z^2)\mathrm{d}z = \frac{3}{8a^3} \cdot a^4 = \frac{3}{8}a.$$

【4138】 $x^2 + y^2 = 2z, x + y = z.$

解 由

$$x^2 + y^2 = 2z, x + y = z.$$

所围成的立体在 xOy 平面上的投影为圆

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

令 $x = 1 + r\cos\varphi, y = 1 + r\sin\varphi, z = z.$

则质量为

$$M = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}} r\mathrm{d}r\int_{1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)}\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{r^2}{2}\right)r\mathrm{d}r = \pi,$$

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}} r\mathrm{d}r\int_{1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)}(1 + r\cos\varphi)\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{M}\Big[\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{r^2}{2}\right)r\mathrm{d}r$$

$$+ \int_0^{2\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} r^2\left(1 - \frac{r^2}{2}\right)\mathrm{d}r\Big]$$

$$= \frac{1}{\pi}(\pi + 0) = 1.$$

同样 $y_0 = 1,$

$$z_0 = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}} r\mathrm{d}r\int_{1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)} z\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}} r\Big[3 + (\sin\varphi + \cos\varphi)(2r - r^2)$$

$$- \frac{1}{4}r^4 - r^2\Big]\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{10\pi}{3} = \frac{10}{3}.$$

【4139】 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{abc}$

$(x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0; a > 0, b > 0, c > 0).$

解 作变量代换

$$x = ar\cos\varphi\cos\psi, y = br\sin\varphi\cos\psi, z = cr\sin\psi.$$

则 $$|I| = abcr^2\cos\psi.$$

积分域为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leqslant r \leqslant \cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi\sin\psi,$$

则质量为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi\sin\psi} abcr^2\cos\psi dr \\ &= \frac{abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\sin^3\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\varphi\sin^3\psi d\psi \\ &= \frac{abc}{3} \cdot \frac{1}{2}B(2,2) \cdot \frac{1}{2}B(4,2) \\ &= \frac{abc}{12}\frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)} \cdot \frac{\Gamma(4) \cdot \Gamma(2)}{\Gamma(6)} \\ &= \frac{abc}{12 \times 5!} = \frac{abc}{1440}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M}a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi\sin\psi} r^3\cos\varphi\cos^2\psi dr \\ &= \frac{1}{M} \cdot \frac{a^2bc}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi\sin^4\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10}\psi\sin^4\psi d\psi \\ &= \frac{1}{M} \cdot \frac{a^2bc}{4} \cdot \frac{1}{2}B\left(3,\frac{5}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}B\left(\frac{11}{2},\frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{1}{M} \cdot \frac{a^2bc}{16} \cdot \frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(8)} \\ &= \frac{1440}{abc} \cdot \frac{a^2bc \cdot 2! \cdot \left(\frac{1 \cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi}\right)^2}{16 \times 7!} = \frac{9\pi}{448}a. \end{aligned}$$

由对称性知

$$y_0 = \frac{9\pi}{448}b, z_0 = \frac{9\pi}{448}c.$$

【4140】 $z = x^2 + y^2, z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$,

$x + y = \pm 1, x - y = \pm 1.$

解　作变量代换

$$u = x - y, v = x + y, z = z.$$

则 $$|I| = \frac{1}{2}.$$

积分域为

$$-1 \leqslant u \leqslant 1, -1 \leqslant v \leqslant 1,$$

$$\frac{u^2 + v^2}{4} \leqslant z \leqslant \frac{u^2 + v^2}{2},$$

所以 $$M = \int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} \frac{1}{2} dz = \frac{1}{3}.$$

又 $$x = \frac{u+v}{2}, v = \frac{v-u}{2},$$

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} \frac{u+v}{2} \cdot \frac{1}{2} dz = 0,$$

$$y_0 = \frac{1}{M}\int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} \frac{v-u}{4} dz = 0,$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} \frac{1}{2} z dz$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)(u^2 + v^2)^2 dv$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16}\int_{-1}^{1} \left(2u^4 + \frac{4u^2}{3} + \frac{2}{5}\right) du = \frac{7}{20}.$$

【4141】 $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$

$(n > 0, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0).$

解　作变量代换

$$x = ar\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi, y = br\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi,$$

$$z = cr\sin^{\frac{2}{n}}\psi.$$

则有 $$|I| = \frac{4}{n^2}abcr^2\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi.$$

所以 $$M = \frac{4}{n^2}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 r^2\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi dr$$

$$= \frac{4}{n^2}abc\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$$

$$= \frac{abc}{3n^2}\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

$$x_0 = \frac{1}{M}\cdot\frac{4}{n^2}a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 r\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi\cdot r^2\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi$$

$$\cdot\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cdot\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi\cdot\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi dr$$

$$= \frac{1}{M}\cdot\frac{a^2bc}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cdot\cos^{\frac{4}{n}-1}\varphi d\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{6}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi d\psi$$

$$= \frac{1}{M}\cdot\frac{a^2bc}{n^2}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{n},\frac{3}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{M}\cdot\frac{a^2bc}{4n^2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}$$

$$= \frac{3n^2\cdot\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{abc\cdot\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{a^2bc}{4n^2}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}\cdot a.$$

同样可求得

$$y_0 = \frac{3}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}\cdot b,$$

$$z_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} \cdot c.$$

【4142】 确定具有立方体形状 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$ 的物体的重心坐标. 其中物体在(x,y,z) 点的密度等于

$$\rho = x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}$$

这里 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1$;

解 物体的质量为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} \mathrm{d}x \int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} \mathrm{d}y \int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}} \mathrm{d}z \\ &= \frac{1-\alpha}{\alpha} x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Big|_0^1 \cdot \frac{1-\beta}{\beta} y^{\frac{\beta}{1-\beta}} \Big|_0^1 \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma} z^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned}$$

重心坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \int_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}+1} \mathrm{d}x \int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} \mathrm{d}y \int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}} \mathrm{d}z \\ &= \frac{\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \cdot (1-\alpha) \cdot \frac{(1-\beta)}{\beta} \cdot \frac{(1-\gamma)}{\gamma} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

同样可求得

$$y_0 = \beta \qquad z_0 = \gamma.$$

确定由下列曲面围成的均质物体对坐标平面的转动惯量(参数是正数)(4143 ~ 4147).

【4143】 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

解
$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \mathrm{d}y \int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} z^2 \mathrm{d}z \\ &= \frac{c^3}{3} \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \left(1-\frac{a}{x}-\frac{y}{b}\right)^3 \mathrm{d}y \\ &= \frac{c^3}{3} \int_0^a \left[-\frac{b}{4}\left(1-\frac{a}{x}-\frac{y}{b}\right)^4 \Big|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \right] \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$= \frac{bc^3}{12}\int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^4 \mathrm{d}x = \frac{abc^3}{60}$$

利用对称性可得

$$I_{yz} = \frac{a^3bc}{60}, I_{xz} = \frac{ab^3c}{60}.$$

【4144】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

解 令 $x = ar\cos\varphi\cos\psi, y = br\sin\varphi\cos\psi, z = cr\sin\psi.$

则 $\quad |I| = abcr^2\cos\psi.$

积分为域为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 1,$$

$$I_{xy} = \iiint_V z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = abc^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^4\cos\psi \cdot \sin^2\psi\mathrm{d}\psi$$

$$= \frac{abc^3}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3}\sin^3\psi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{15}abc^3.$$

利用对称性可得

$$I_{yz} = \frac{4\pi}{15}a^3bc, I_{xz} = \frac{4\pi}{15}ab^3c.$$

【4145】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z = c.$

解 令

$$x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi, z = z.$$

则
$$I_{xy} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\mathrm{d}r\int_{cr}^c z^2 \cdot abr\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2ab\pi}{3}\int_0^1 (c^3 - c^3r^3)r\mathrm{d}r = \frac{1}{5}\pi abc^3,$$

$$I_{yz} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\mathrm{d}r\int_{cr}^c (ar\cos\varphi)^2 abr\mathrm{d}z$$

$$= a^3bc\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 (1-r)r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{20}a^3bc.$$

由对称性知

$$I_{zx} = \frac{\pi}{20}ab^3c.$$

【4146】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}.$

解 令

$$x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi, z = z.$$

则 $$|I| = abr.$$

积分域为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant\cos\varphi,$

$$-c\sqrt{1-r^2}\leqslant z\leqslant c\sqrt{1-r^2},$$

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}abr\,\mathrm{d}r\int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}}z^2\,\mathrm{d}z\\
&= \frac{2}{3}abc^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}r\,\mathrm{d}r\\
&= \frac{2}{3}abc^3\cdot\frac{1}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[1-(\sin^2\varphi)^{\frac{5}{2}}]\mathrm{d}\varphi\\
&= \frac{4}{15}abc^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^5\varphi)\mathrm{d}\varphi\\
&= \frac{4}{15}abc^3\left(\varphi+\cos\varphi-\frac{2}{3}\cos^3\varphi+\frac{1}{5}\cos^5\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{2abc^3}{225}(15\pi-16).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{yz} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}abr\,\mathrm{d}r\int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}}(ar\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}z\\
&= 2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}\sqrt{1-r^2}\,r^3\,\mathrm{d}r\\
&= 2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\cos^3 t\cdot\sin t\,\mathrm{d}t\\
&= 2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\left\{\int_{\varphi}^{0}|\sin t|\cos^3 t\sin t\,\mathrm{d}t\right.\\
&\quad\left.+\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\cos^3 t\sin t\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

$$= 2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{2}{15}+\int_{\varphi}^{0}|\sin t|\sin t\cos^3 t\mathrm{d}t\right\}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2a^3bc\left\{\frac{\pi}{15}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-\int_{\varphi}^{0}\sin^2 t\cos^3 t\mathrm{d}t\right)\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\varphi}^{1}\sin^2 t\cos^3 t\mathrm{d}t\right)\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right\}$$

$$= 2a^3bc\left\{\frac{\pi}{15}+\int_{0}^{-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right\}$$

$$= 2a^3bc\left(\frac{\pi}{15}-\frac{92}{1575}\right)=\frac{2a^3bc}{1575}(105\pi-92).$$

$$I_{zx}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{\cos\varphi}abr\mathrm{d}r\int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}}(br\sin\varphi)^2\mathrm{d}z$$

$$= 2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{\cos\varphi}\sqrt{1-r^2}\,r^3\sin^2\varphi\mathrm{d}r$$

$$= 2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\sin t\cdot\cos^3 t\mathrm{d}t$$

$$= 2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{2}{15}+\int_{\varphi}^{0}|\sin t|\sin t\cos^3 t\mathrm{d}t\right\}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2ab^3c\left\{\frac{\pi}{15}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-\int_{\varphi}^{0}\sin^2 t\cos^3 t\mathrm{d}t\right)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\varphi}^{0}\sin^2 t\cos^3 t\mathrm{d}t\right)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right\}$$

$$= 2ab^3c\left\{\frac{\pi}{15}+\int_{0}^{-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right\}$$

$$= 2ab^3c\left(\frac{\pi}{15}-\frac{272}{1575}\right)=\frac{2ab^3c}{1575}(105\pi-272).$$

【4147】 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2\dfrac{z}{c},\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}.$

解 两曲面的交线在 xOy 平面上的投影为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}=0,$$

即 $$\left(\frac{x}{a}-1\right)^2+\left(\frac{y}{b}-1\right)^2=2.$$

令 $x=a(1+r\cos\varphi), y=b(1+r\sin\varphi), z=z,$

则 $$|I|=abr$$

积分域为 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2},$

$$c\left[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]\leqslant z\leqslant c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]$$

所以 $$\begin{aligned}I_{xy}&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}abr\,\mathrm{d}r\int_{c\left[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]}^{c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]}z^2\,\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{3}abc^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r\Big[(8+12r(\cos\varphi+\sin\varphi)\\&\quad+6r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2-\left(1+\frac{r^2}{2}\right)^3-3\left(1+\frac{r^2}{2}\right)^2r(\cos\varphi\\&\quad+\sin\varphi)-3\left(1+\frac{r^2}{2}\right)r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\Big]\mathrm{d}r\\&=\frac{7}{2}\pi abc^3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{yz}&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}abr\cdot a^2(1+r\cos\varphi)^2\mathrm{d}r\int_{c\left[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]}^{c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]}\mathrm{d}z\\&=a^3bc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r(1+2r\cos\varphi+r^2\cos^2\varphi)\left(1-\frac{r^2}{2}\right)\mathrm{d}r\\&=\frac{4\pi}{3}a^3bc.\end{aligned}$$

由对称可得

$$I_{zx}=\frac{4\pi}{3}ab^3c.$$

【4147.1】 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}.$

解 令

$$x=ar\cos\varphi\cos\psi, y=br\sin\varphi\sin\psi, z=cr\sin\psi.$$

则 $$|I|=abcr^2\cos\psi.$$

曲面方程变为

$$r^2 = \cos 2\psi,$$

故积分域为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, -\frac{\pi}{4} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{4},$$

$$0 \leqslant r \leqslant \sqrt{\cos 2\psi},$$

$$I_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\psi \int_0^{\sqrt{\cos 2\psi}} abcr^2 \cdot \cos\psi \cdot (cr\sin\psi)^2 dr$$

$$= abc^3 \cdot 2\pi \frac{1}{5}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\psi)^{\frac{5}{2}} \cos\psi \sin^2\psi d\psi$$

$$= \frac{4\pi}{5}abc^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-2\sin^2\psi)^{\frac{5}{2}} \sin^2\psi d(\sin\psi)$$

$$(令\ \sin\psi = t)$$

$$= \frac{4\pi}{5}abc^3 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-2t^2)^{\frac{5}{2}} t^2 dt \qquad (令\sqrt{2}t = \sin u)$$

$$= \frac{4\pi}{5}abc^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 u \cdot \sin^2 u du$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{5}abc^3 \cdot \frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}abc^3 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(5)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{10}abc^3 \cdot \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{4!} = \frac{\sqrt{2}\pi}{256}abc^3.$$

$$I_{yz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\psi \int_0^{\sqrt{\cos 2\psi}} abcr^2 \cos\psi (ar\cos\varphi\cos\psi)^2 dr$$

$$= a^3bc \cdot \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\psi)^{\frac{5}{2}} \cos^2\psi d\psi$$

$$= \frac{2\pi}{5}a^3bc \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-2\sin^2\psi)^{\frac{5}{2}} \cos^2\psi d(\sin\psi)$$

$$(令\ \sin\psi = t)$$

$$= \frac{2\pi}{5}a^3bc \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-2t^2)^{\frac{5}{2}} (1-t^2) dt \qquad (令\sqrt{2}t = \sin u)$$

$$= \frac{2\pi}{5}a^3bc\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 du - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 u \cdot \sin^2 u du\right]$$

$$= \frac{2\pi}{5}a^3bc\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2\pi}{5}a^3bc\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{4!}\right]$$

$$= \frac{2\pi}{5}a^3bc\cdot\frac{15\pi}{2^4\sqrt{2}}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{96}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi^2a^3bc}{512}.$$

由对称性可得

$$I_{zx} = \frac{\sqrt{2}\pi^2ab^3c}{512}.$$

【4147.2】 $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1, x=0, y=0, z=0$

$(n>0; x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$.

解 令

$$x = ar\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi,\ y = br\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi,$$

$$z = cr\sin^{\frac{2}{n}}\psi.$$

则

$$|I| = \frac{4}{n^2}abcr^2\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi.$$

积分域为 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 1$.

$$I_{xy} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1\frac{4}{n^2}abc^3r^4\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi\sin^{\frac{6}{n}-1}\psi dr$$

$$= \frac{4}{5n^2}abc^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{6}{n}-1}\psi\cdot\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi d\psi$$

$$= \frac{4}{5n^2}abc^3\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{n},\frac{2}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{5n^2}abc^3 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{5n^2} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}abc^3.$$

由对称性知

$$I_{yz} = \frac{1}{5n^2} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)} \cdot a^3bc,$$

$$I_{zx} = \frac{1}{5n^2} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)} \cdot ab^3c.$$

确定由下列曲面所围的均质物体对 Oz 轴的转动惯量(4148 ～ 4149).

【4148】 $z = x^2 + y^2, x + y = \pm 1, x - y = \pm 1, z = 0.$

解 $I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$

作变量代换

$$u = x + y, v = x - y, z = z,$$

即 $$x = \frac{u+v}{2}, v = \frac{u-v}{2}, z = z,$$

则 $$|I| = \frac{1}{2}.$$

曲面 $z = x^2 + y^2$ 变为 $z = \dfrac{u^2+v^2}{2}$ 积分域 V 为

$$-1 \leqslant u \leqslant 1, -1 \leqslant v \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant \frac{u^2+z^2}{2},$$

又 $$x^2 + y^2 = \frac{u^2+v^2}{2},$$

所以 $$I_z=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{0}^{\frac{u^2+v^2}{2}}\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2+v^2}{2}\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}(u^2+v^2)^2\mathrm{d}v=\frac{14}{45}.$$

【4149】 $x^2+y^2+z^2=2, x^2+y^2=z^2\qquad(z>0)$.

解 令
$$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=z.$$
则 $$|I|=r.$$
积分域 V 为
$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant 1, r\leqslant z\leqslant\sqrt{2-r^2},$$
所以 $$I_z=\iiint_V(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{2-r^2}}r\cdot r^2\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(r^3\sqrt{2-r^2}-r^4)\mathrm{d}r$$
$$=2\pi\left[\int_0^1 r^3\sqrt{2-r^2}\mathrm{d}r-\frac{1}{5}\right].$$

令 $r=\sqrt{2}\sin t$.

则有 $$\int_0^1 r^3\sqrt{2-r^2}\mathrm{d}r=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$
$$=-4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2 t)\cos^2 t\mathrm{d}(\cos t)$$
$$=-4\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{1}{5}\cos^5 t\right)=\frac{8\sqrt{2}-7}{15},$$
因此 $$I_z=2\pi\cdot\left[\frac{8\sqrt{2}-7}{15}-\frac{1}{5}\right]=\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5).$$

【4149.1】 $(x^2+y^2+z^2)^3=a^5z$.

解 显然 $z\geqslant 0$，令
$$x=r\cos\varphi\cos\psi, y=r\sin\varphi\cos\psi, z=r\sin\psi.$$
则 $$|I|=r^2\cos\psi$$
积分域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant a\sqrt[5]{\sin\psi},$$

所以 $$I_z=\iiint\limits_V(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{a\sqrt[5]{\sin\psi}}r^2\cdot\cos\psi\cdot r^2\cdot\cos^2\psi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{a^5}{5}\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\cdot\sin\psi\mathrm{d}\psi=\frac{a^5\pi}{10}.$$

【4150】 若球在动点 $P(x,y,z)$ 的密度与这个点到球心的距离成正比，求质量为 M 非均质球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 对其直径的转动惯量.

解 令

$$x=r\cos\varphi\cos\varphi,y=r\sin\varphi\cos\psi,z=r\sin\psi.$$

则质量 $$M=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^R r^2\cos\psi kr\,\mathrm{d}r=k\pi R^4.$$

由此得 $k=\dfrac{M}{\pi R^4}$，即密度 $\rho=\dfrac{Mr}{\pi R^4}$. 所以，所求转动惯量为

$$I_z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^R r^2\cos^2\psi\cdot r^2\cos\psi\cdot\frac{Mr}{\pi R^4}\mathrm{d}r$$

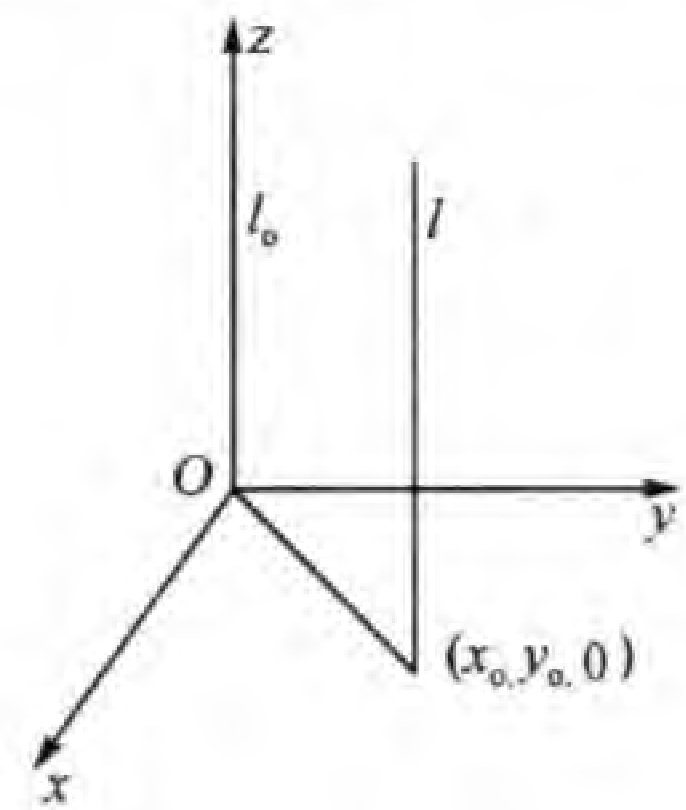
$$=\frac{2M}{R^4}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\mathrm{d}\psi\right)\left(\int_0^R r^5\,\mathrm{d}r\right)=\frac{4MR^2}{9}.$$

【4151】 证明等式 $I_l=I_{l_0}+Md^2$，其中 I_l 为物体对某个轴 l 的转动惯量；I_{l_0} 为平行于 l 并通过物体重心的轴 l_0 的转动惯量；d 为轴之间的距离，M 为物体的质量.

证 设重心为坐标原点 O，z 轴与 l_0 重合，建立坐标系，l 与 xOy 平面的交点为 $(x_0,y_0,0)$. 如 4151 题图所示，则

$$I_l=\iiint\limits_v[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_v(x^2+y^2)\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x_0^2+y_0^2)\iiint\limits_v\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$



4151 题图

$$-2x_0\iiint_v x\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y_0\iiint_v y\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由于重心在原点，故

$$\frac{1}{M}\iiint_v x\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\frac{1}{M}\iiint_v y\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

并且 $M=\iiint_v\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}^2=x_0^2+y_0^2,$

因此 $I_l=I_{l_0}+M\mathrm{d}^2.$

【4152】 证明：体积为 V 的物体对通过其重心 $O(0,0,0)$ 并与坐标轴形成 α,β,γ 角度的轴 l 的转动惯量等于：

$$I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$
$$-2K_{xz}\cos\alpha\cos\gamma-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma,$$

其中 I_x,I_y,I_z 为物体对坐标轴的转动惯量且

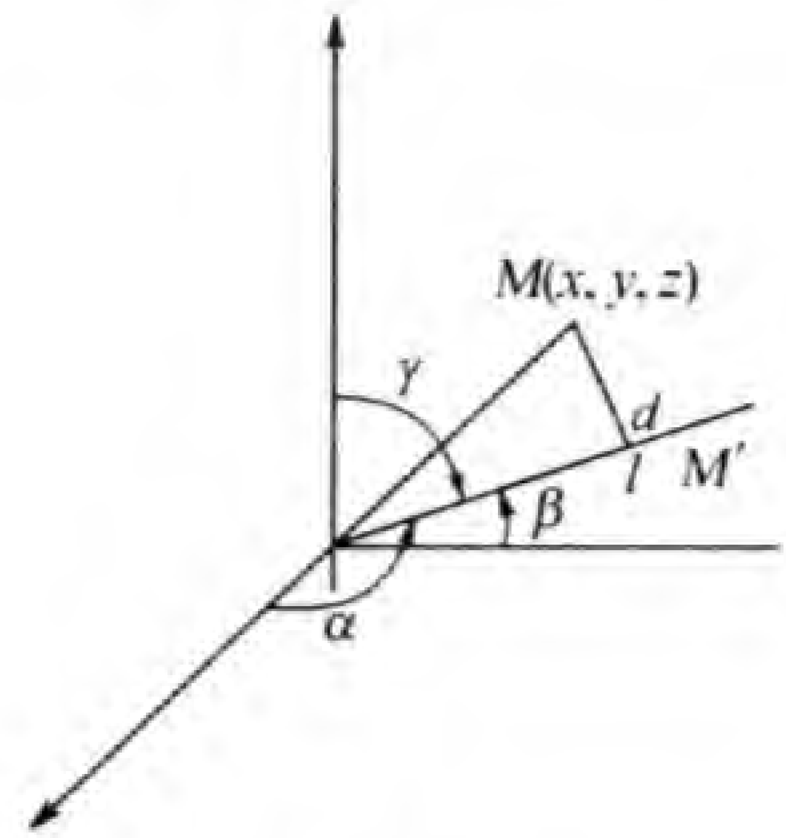
$$K_{xy}=\iiint_V\rho xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,K_{xz}=\iiint_V\rho xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$K_{yz}=\iiint_V\rho yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

为离心矩.

证 如 4152 题图所示

$$\mathrm{d}=\frac{|\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{OM'}|}{\overrightarrow{OM'}}.$$



4152 题图

设 $r=|\overrightarrow{OM'}|$，则

$$\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{OM'}=\left\{\begin{vmatrix} y & z \\ r\cos\beta & r\cos\gamma \end{vmatrix},\begin{vmatrix} z & x \\ r\cos\gamma & r\cos\alpha \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x & y \\ r\cos\alpha & r\cos\beta \end{vmatrix}\right\}.$$

注意到 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，

因此 $$\begin{aligned} d^2 &= (x^2+y^2)\cos^2\gamma+(y^2+z^2)\cos^2\alpha+(z^2+x^2)\cos^2\beta \\ &\quad -2xy\cos\alpha\cos\beta-2yz\cos\beta\cos\gamma-2xz\cos\alpha\cos\gamma. \end{aligned}$$

故 $$\begin{aligned} I_l &= \iiint\limits_v \rho d^2\,dx\,dy\,dz \\ &= \cos^2\gamma\iiint\limits_v \rho\cdot(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \\ &\quad +\cos^2\alpha\iiint\limits_v \rho(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz \\ &\quad +\cos^2\beta\iiint\limits_v \rho(x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz \\ &\quad -2\cos\alpha\cos\beta\iiint\limits_v \rho xy\,dx\,dy\,dz \\ &\quad -2\cos\beta\cos\gamma\iiint\limits_v \rho yz\,dx\,dy\,dz \\ &\quad -2\cos\alpha\cos\gamma\iiint\limits_v \rho xz\,dx\,dy\,dz \end{aligned}$$

$$= I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2k_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$
$$- 2k_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2k_{zx}\cos\gamma\cos\alpha.$$

【4153】 求密度为 ρ_0 的均质圆柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2, z=\pm h$，对直线 $x=y=z$ 的转动惯量.

解 利用上一题结果. 直线 $x=y=z$ 通过圆柱的重心 $O(0,0,0)$，且具有方向余弦

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

利用柱坐柱计算积分

$$I_x = \iiint_v \rho_0(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-h}^h \rho_0(r^2\sin^2\varphi+z^2)\mathrm{d}z$$
$$= \left(\frac{1}{2}\pi a^4 h + \frac{2}{3}\pi a^2 h^3\right)\rho_0,$$

$$I_y = \iiint_v \rho_0(x^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-h}^h \rho_0(r^2\cos^2\varphi+z^2)\mathrm{d}z$$
$$= \left(\frac{1}{2}\pi a^4 h + \frac{2}{3}\pi a^2 h^3\right)\rho_0,$$

$$I_z = \iiint_v \rho_0(x^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^3\mathrm{d}r\int_{-h}^h \rho_0\mathrm{d}z = \pi h a^4\rho_0,$$

$$K_{xy} = \iiint_v xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-h}^h \rho_0 r^2\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}z$$
$$= 0,$$

$$K_{yz} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-h}^h \rho_0 r\sin\varphi\cdot z\mathrm{d}z = 0,$$

$$K_{zx} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-h}^h \rho_0 r\cos\varphi\cdot z\mathrm{d}z = 0,$$

因此 $I_l = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma$

$$-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2K_{zx}\cos\alpha\cos\gamma$$

$$= \frac{\rho_0}{3}\left(\frac{1}{2}\pi a^4 h + \frac{2}{3}\pi a^2 h^3 + \frac{1}{2}\pi a^4 h + \frac{2}{3}\pi a^2 h^3 + \pi a^4 h\right)$$

$$= \frac{2\pi\rho_0 a^2 h}{3}\left(a^2 + \frac{2}{3}h^2\right) = \frac{M}{3}\left(a^2 + \frac{2}{3}h^2\right),$$

其中 $M = 2\pi\rho_0 a^2 h$ 为圆柱的质量.

【4154】 求由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2)$ 围成的密度为 ρ_0 的均质物体对坐标原点转动惯量.

解 令

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, y = r\sin\varphi\cos\psi, z = r\sin\psi.$$

则 $|I| = r^2\cos\psi.$

曲面所界的域为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant a\cos\psi.$$

对坐标原点的转动惯量为

$$I_0 = \iiint_V \rho_0(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{a\cos\psi}\rho_0 r^2\cdot r^2\cos\psi\mathrm{d}r$$

$$= \frac{4\pi\rho_0 a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\psi\mathrm{d}\psi$$

$$= \frac{4\pi\rho_0 a^5}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^5\rho_0}{8}.$$

【4155】 求密度为 ρ_0 的均质球 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leqslant R^2$ 在点 $P(x,y,z)$ 的牛顿势.

提示:假定轴 $O\zeta$ 通过点 $P(x,y,z)$.

解 由对称性可知,所求的牛顿势与 ξ,η,δ 轴取的方向无关.现 $O\delta$ 轴通过点 (x,y,z) 即得牛顿势为

$$u(x,y,z) = \iiint_{\xi^2+\eta^2+\delta^2\leqslant R^2}\rho_0\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\delta}{\sqrt{\xi^2+y^2+(\delta-\gamma)^2}}$$

$$=\rho_0\int_{-R}^{R}d\delta\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant R^2-\delta^2}\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\delta-r)^2}},$$

其中 $\gamma=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

利用极坐标

$$\xi=\rho\cos\theta,\eta=\rho\sin\theta,$$

可得

$$\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant R^2-\delta^2}\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\delta-r)^2}}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{R^2-\delta^2}}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+(\delta-r)^2}}$$

$$=2\pi\sqrt{\rho^2+(\delta-r)^2}\Big|_0^{\sqrt{R^2-\delta^2}}$$

$$=2\pi(\sqrt{R^2-2r\delta+r^2}-|\delta-r|).$$

而 $\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-2r\delta+r^2}\,d\delta$

$$=-\frac{1}{3r}(R^2-2r\delta+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-R}^{R}$$

$$=\frac{1}{3r}[(R+r)^3-|R-r|^3]$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{3}R^3\frac{1}{r}+2rR & (r>R),\\ \frac{2}{3}r^2+R^2 & (r\leqslant R).\end{cases}$$

$$\int_{-R}^{R}|\delta-r|\,d\delta=\begin{cases}2Rr & (r>R),\\ r^2+R^2 & (r\leqslant R).\end{cases}$$

因此 $u(x,y,z)=\rho_0\int_{-R}^{R}2\pi(\sqrt{R^2-2r\delta+r^2}-|\delta-r|)d\delta$

$$=\begin{cases}\frac{4}{3r}\pi R^3\rho_0 & (r>R),\\ 2\pi\rho_0\left(R^2-\frac{1}{3}r^2\right) & (r\leqslant R).\end{cases}$$

【4156】 设密度 $\rho=f(R)$，这里 f 为为已知函数且 $R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$，求球壳层 $R_1^2\leqslant\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R_2^2$ 在点 $P(x,y,z)$ 的

牛顿势.

解 取 $O\delta$ 轴通过点 $P(x,y,z)$，则牛顿势为

$$u(x,y,z)$$
$$=\iiint\limits_{R_1^2\leqslant\xi^2+\eta^2+\delta^2\leqslant R_2^2} f(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\delta^2})\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\delta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\delta-r_0)^2}},$$

其中 $r_0=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

利用球坐标即得

$$u(x,y,z)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{R_1}^{R_2}r^2\cos\psi\cdot\frac{f(r)}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\sin\psi}}\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r^2f(r)\frac{\cos\psi\mathrm{d}\psi}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\sin\psi}}\mathrm{d}\psi$$

$$=2\pi\int_{R_1}^{R_2}r^2f(r)\left[-\frac{1}{rr_0}\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\sin\psi}\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_{R_1}^{R_2}r^2f(r)\left[-\frac{1}{rr_0}(|r-r_0|-r-r_0)\right]\mathrm{d}r$$

$$=\begin{cases}4\pi\int_{R_1}^{R_2}rf(r)\mathrm{d}r & \text{当} r>r_0\\ 4\pi\int_{R_1}^{R_2}\frac{r^2}{r_0}f(r)\mathrm{d}r & \text{当} r>r_0,\end{cases}$$

因此 $u(x,y,z)=4\pi\int_{R_1}^{R_2}f(r)\min\left(\frac{r^2}{r_0},r\right)\mathrm{d}r.$

【4157】 求密度为 ρ_0 的圆柱体 $\xi^2+\eta^2\leqslant a^2,0\leqslant\zeta\leqslant h$ 在点 $P(0,0,z)$ 的牛顿势.

解 利用柱坐标，得

$$u(x,y,z)=\rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h\mathrm{d}\delta\int_0^a\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+(\delta-z)^2}}$$

$$=2\pi\rho_0\int_0^h\sqrt{r^2+(\delta-z)^2}\Bigg|_0^a\mathrm{d}\delta$$

$$=2\pi\rho_0\int_0^h[\sqrt{a^2+(\delta-z)^2}-|\delta-z|]\mathrm{d}\delta$$

$$= 2\pi\rho_0\left[\frac{\delta-z}{2}\sqrt{a^2+(\delta-z)^2}+\frac{a^2}{2}\ln\mid(\delta-z)\right.$$

$$\left.+\sqrt{a^2+(\delta-z)^2}\mid-\frac{(\delta-z)\mid\delta-z\mid}{z}\right]_0^h$$

$$= \pi\rho_0\left\{(h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2}\right.$$

$$+z\sqrt{a^2+z^2}+a^2\ln\left|\frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{-z+\sqrt{a^2+z^2}}\right|$$

$$\left.-[(h-z)\mid h-z\mid+z\mid z\mid]\right\}.$$

【4158】 质量为M的均质球$\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$用多大的力来吸引质量为$m$的质点$P(0,0,a)$?

解 引力在Ox轴和Oy轴上的投影为零，即$X=Y=0$，而在Oz轴上的投影为

$$Z = km\rho_0\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\delta^2\leqslant R^2}\frac{(\delta-a)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\delta}{[\xi^2+\eta^2+(\delta-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= km\rho_0\int_{-R}^{R}(\delta-a)\mathrm{d}\delta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{R^2-\delta^2}}\frac{r\mathrm{d}r}{[r^2+(\delta-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2\pi km\rho_0\int_{-R}^{R}(\delta-a)\left(\frac{1}{\mid\delta-a\mid}-\frac{1}{\sqrt{R^2-2a\delta+a^2}}\right)\mathrm{d}\delta$$

$$= 2\pi km\rho_0\left(\int_{-R}^{R}\operatorname{sgn}(\delta-a)\mathrm{d}\delta-\int_{-R}^{R}\frac{(\delta-a)\mathrm{d}\delta}{\sqrt{R^2-2a\delta+a^2}}\right),$$

其中 $\rho_0=\dfrac{3M}{4\pi R^3}$.

我们这里只考虑$a\geqslant 0$的情况，对于$a<0$的情况可同样考虑.

当$a\geqslant R$时，

$$\int_{-R}^{R}\operatorname{sgn}(\delta-a)\mathrm{d}\delta=-\int_{-R}^{R}=-2R.$$

当$0\leqslant a<R$时，

$$\int_{-R}^{R}\operatorname{sgn}(\delta-a)\mathrm{d}\delta=-\int_{-R}^{a}\mathrm{d}\delta+\int_a^R\mathrm{d}\delta=-2a.$$

而
$$\int_{-R}^{R}\frac{(\delta-a)\mathrm{d}\delta}{\sqrt{R^2-2a\delta+a^2}}$$
$$=-\frac{1}{2a}\int_{-R}^{R}\frac{R^2+a^2-2a\delta-(R^2+a^2)}{\sqrt{R^2-2a\delta+a^2}}\mathrm{d}\delta$$
$$-a\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}\delta}{\sqrt{R^2-2a\delta+a^2}}$$
$$=-\frac{1}{2a}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2+a^2-2a\delta}\,\mathrm{d}\delta$$
$$+\frac{R^2-a^2}{2a}\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}\delta}{\sqrt{R^2+a^2-2a\delta}}$$
$$=\left[\frac{1}{6a^2}(R^2+a^2-2a\delta)^{\frac{3}{2}}-\frac{R^2-a^2}{2a^2}(R^2+a^2-2a\delta)^{\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_{-R}^{R}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{2R^3}{3a^2}-2R & \text{当 } a\geqslant R \text{ 时}\\ -\dfrac{4a}{3} & \text{当 } 0\leqslant a<R \text{ 时},\end{cases}$$
因此,当 $a\geqslant R$ 时,
$$Z=2\pi km\rho_0\left(-2R-\frac{2R^3}{3a^2}+2R\right)$$
$$=-\frac{4\pi}{3a^2}km\rho_0=-\frac{kMm}{a^2}.$$
当 $a<R$ 时,
$$Z=2\pi km\rho_0\left(-2a+\frac{4a}{3}\right)=-\frac{4}{3}\pi akm\rho_0=-\frac{kMm}{R^3}a.$$

【4159】 求密度为 ρ_0 的均质圆柱体 $\xi^2+\eta^2\leqslant a^2, 0\leqslant\zeta\leqslant h$,对单位质量的点 $P(0,0,z)$ 的吸引力.

解 由对称性知,引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的投影为零,即 $X=Y=0$,利用柱坐标,得
$$Z=k\rho_0\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant a^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\int_0^h\frac{(\delta-z)\mathrm{d}\delta}{[\xi^2+\eta^2+(\delta-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$
$$=k\rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_0^h\frac{(\delta-z)\mathrm{d}\delta}{[r^2+(\delta-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2\pi k\rho_0\int_0^a r\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+(h-z)^2}}\right]\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi k\rho_0\left[\sqrt{a^2+z^2}-\sqrt{a^2+(h-z)^2}-|z|+|h-z|\right].$$

【4160】 若球面半径等于 R，而球锥体的轴截面的角度等于 2α. 求密度为 ρ_0 的均质球锥体对位于其顶点的单位质点的吸引力.

解 由对称性知，引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的投影为 0，即 $X = Y = 0$. 利用球面坐标得

$$Z = \iiint\limits_v \frac{k\rho_0 z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= k\rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\sin\psi\mathrm{d}\psi\int_0^R\mathrm{d}r = k\pi R\rho_0\sin^2\alpha.$$

§9. 广义的二重和三重积分

1. **无界域的情况** 若二维域 Ω 无界，且函数 $f(x,y)$ 在域 Ω 是连续的，则定义：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad ①$$

其中 Ω_n 为可求积的有界封闭子域的任意序列，它可盖满域 Ω. 若右边存在极限且与序列 Ω_n 的选择无关，则对应的积分被称为收敛，相反则被称为发散.

同理，定义在无界三维域上的连续函数的三重广义积分.

2. **不连续函数的情况** 若函数 $f(x,y)$ 在有界封闭域 Ω 除 $P(a,b)$ 点之外都是连续的，则定义：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\Omega-U_\varepsilon} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad ②$$

其中 U_ε 是点 P 的 ε 领域，且在存在极限的情况下所研究的积分称为收敛，相反称为发散.

假定在点 $P(a,b)$ 附近具有等式：

$$f(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{r^{\alpha}}.$$

其中函数 $\varphi(x,y)$ 的绝对值介于 $m>0$ 和 $M>0$ 之间,且

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

得出:(1) 当 $\alpha<2$ 时,积分 ② 收敛;(2) 当 $\alpha\geqslant 2$ 时则发散.

若函数 $f(x,y)$ 有不连续线,同样可定义广义积分 ②.

不连续函数广义积分的概念很容易引申到三重积分的情况.

研究下列具有无界积分域的广义积分收敛性($0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M<+\infty$)(4161 ~ 4165).

【4161】 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解 因为

$$\frac{m}{(x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{M}{(x^2+y^2)^p},$$

而广义重积分收敛的充要条件是绝对收敛,(证明见菲赫戈兹者《微积分学教程》第三卷 588 段). 所以,积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

与积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

有相同的敛散性. 利用极坐标可得

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty}\frac{r}{r^{2p}}\mathrm{d}r$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{p-1} & \text{当 } p>1 \text{ 时},\\ +\infty & \text{当 } p\leqslant 1 \text{ 时},\end{cases}$$

因此,原积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 当 $p>1$ 时收敛,当 $p\leqslant 1$ 时发散.

【4162】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+|x|^{p})(1+|y|^{q})}$.

解 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+|x|^{p})(1+|y|^{q})}$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+|x|^{p}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+|y|^{q}}$$
$$=4\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{p}}\cdot\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^{q}}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{p}\cdot\frac{1}{1+x^{p}}=1$,

故积分 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{p}}$ 当 $p>1$ 时收敛, $p\leqslant1$ 时发散.

同理积分 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^{q}}$,当 $q>1$ 时收敛,当 $q\leqslant1$ 时发散,且注意到 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{p}}$ 与 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^{q}}$ 均不为 0.

故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+|x|^{p})(1+|y|^{q})}$,当且仅当 $p>1$,且 $q>1$ 时收敛,其它情形均发散.

【4163】 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^{2}+y^{2})^{p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 积分 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^{2}+y^{2})^{p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与积分 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^{2}+y^{2})^{p}}$ 有相同的敛散性. 而

$$\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^{2}+y^{2})^{p}}=\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{2}+y^{2})^{p}}$$
$$=2\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{2}+y^{2})^{p}}.$$

当 $0\leqslant y\leqslant1$ 时,若 $p\geqslant0$,则有

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(2+x^{2})^{p}}\leqslant\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{2}+y^{2})^{p}}\leqslant\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{2})^{p}}$$

所以

$$2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{(2+x^2)^p}\leqslant\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^p}$$
$$\leqslant 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^p}.$$

若 $p<0$,则有

$$2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^p}\leqslant\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^p}$$
$$\leqslant 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(2+x^2)^p}.$$

又 $$\lim_{x\to+\infty}x^{2p}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^p}=\lim_{x\to+\infty}x^{2p}\frac{1}{(2+x^2)^{2p}}=1.$$

因此,当 $2p>1$ 即 $p>\frac{1}{2}$ 时,原积分收敛;当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时,原积分发散.

【4164】 $$\iint\limits_{|x|+|y|>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}\qquad(p>0,q>0).$$

解 由对称性知

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}=4\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ x+y\geqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q},$$
$$=4\iint\limits_{\Omega_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^p}+4\iint\limits_{\Omega_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}$$

其中 $\Omega_1=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\geqslant 1,x^p+y^q\leqslant 2\}$,
$\Omega_2=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\geqslant 1,x^p+y^q\geqslant 2\}$,

令 $\Omega_3=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\geqslant 2\}$.

显然 $\Omega_2\subset\Omega_3$,而当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 且 $x^p+y^q\geqslant 2$ 时必有 $x+y\geqslant 1$,事实上,若 $x+y<1$,则 $0\leqslant x<1,0\leqslant y<1$. 所以 $0\leqslant x^p<1,0\leqslant y^q<1$,从而 $x^p+y^q<2$,矛盾. 所以 $\Omega_3\subset\Omega_2$,故 $\Omega_2=\Omega_3$. 由于 Ω_1 是有界区域,故原积分的敛散性取决于广义积分 $\iint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}$ 的敛散性. 作变量代换

$$x=r^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\varphi,y=r^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\varphi.$$

则 $$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\frac{4}{pq}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi.$$

积分域 $\Omega_3:0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\sqrt{2}\leqslant r\leqslant+\infty$.

所以$$\iint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=\frac{4}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r.$$

由 3856 题的结果知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{q},\frac{1}{p}\right)\quad(p>0,q>0),$$

而当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3<-1$,即$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$时积分$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r$收敛;当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3\geqslant-1$,即$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant1$时,积分$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r$ 发散.

因此,广义积分 $\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$ 当且仅当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$时收敛.

【4165】 $\iint\limits_{x+y>1}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 $$\iint\limits_{x+y>1}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{x+y>1}\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $x+y=u,x-y=v$.

则 $$x=\frac{u+v}{2},y=\frac{u-v}{2}.$$

从而 $|I|=\frac{1}{2}$,则积分域变为:$u>1,-\infty<u<+\infty$,所以

$$\iint\limits_{x+y>1}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\iint\limits_{u>1}\frac{\cos v-\cos u}{u^p}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

对于任何 p 及 $u>1$ 有$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos v-\cos u}{u^p}\mathrm{d}v$ 发散. 因此,原积分发散.

【4166】 证明:若连续函数 $f(x,y)$ 是非负值,且 $S_n(n=1,2,\cdots)$ 为有界封闭域的任意一个序列,且可盖满域 S;则:

$$\iint\limits_{S} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中左边与右边同时有意义或同时没有意义.

证 取定一有界闭域的序列 S'_n 满足 $S'_1\subset S'_2\subset\cdots\subset S'_n\subset\cdots\subset S$ 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}S'_n=S$. 由于 $f(x,y)$ 在 S 上非负,故积分序列 $\iint\limits_{S'_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是递增的,从而极限

$$I=\lim_{x\to\infty}\iint\limits_{S'_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad ①$$

存在(有限或 $+\infty$). 我们要证

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I. \qquad ②$$

设 I 为有限数,任给 $\varepsilon>0$,存在 N,使得当 $n\geqslant N$ 时,恒有

$$I-\varepsilon<\iint\limits_{S'_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<I+\varepsilon.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,故存在 n_0,使得当 $n\geqslant n_0$ 时,S_n(包含)S'_N. 从而,根据上式及 $f(x,y)$ 的非负性有

$$\iint\limits_{S_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint\limits_{S'_N} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>I-\varepsilon,$$

另一方面,对每个固定的 $n(\geqslant n_0)$,必存在一个充分大的 $k_n(\geqslant N)$ 使 $S'_{k_n}\supset S_n$. 于是有

$$\iint\limits_{S_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{S'_{k_n}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<I+\varepsilon,$$

由此可知,当 $n\geqslant n_0$ 时,恒有

$$I-\varepsilon<\iint\limits_{S_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<I+\varepsilon,$$

故 ② 式成立.

若 $I=+\infty$,则任给 $M>0$,存在 N_1 使得

$$\iint\limits_{S'_{N_1}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>M,$$

又存在 n_1,使得当 $n\geqslant n_1$ 时,恒有 $S_N\supset S'_{N_1}$,因此

$$\iint\limits_{S_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint\limits_{S_{N_1}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>M,$$

即 ② 式成立.

【4167】 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\|y|\leqslant n}}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi,$$

但 $$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2<2\pi n}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\qquad(n\text{ 为自然数}).$$

证 利用对称性有

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\|y|\leqslant n}}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=4\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant n\\0\leqslant y\leqslant n}}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=4\int_0^n\mathrm{d}y\int_0^n(\sin x^2\cos y^2+\cos x^2\sin y^2)\mathrm{d}x\\
&=4\left(\int_0^n\cos y^2\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^n\sin x^2\mathrm{d}x\right)\\
&\quad+4\left(\int_0^n\cos x^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^n\sin y^2\mathrm{d}y\right)\\
&=8\left(\int_0^n\cos x^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^n\sin x^2\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}$$

根据 3830 题的结果有

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},$$

从而 $$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\cos x^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant a\\|y|\leqslant a}}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}=\pi,$$

利用极坐标,有

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2\pi n}}r\sin r^2\mathrm{d}r=-\pi\cos r^2\Big|_0^{\sqrt{2\pi n}}\\&=\pi(1-\cos 2\pi n)=0\qquad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

【4168】 证明:积分

$$\iint\limits_{x>1,y>1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

发散,虽然累次积分

$$\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y,$$

和 $$\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x,$$

收敛.

证 先证两个累次积分收敛.

因为

$$\begin{aligned}&\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\\&=\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{2y}\cdot\frac{2y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}-\int_1^{+\infty}\frac{y}{2}\cdot\frac{2y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}\\&=-\frac{x^2}{2y}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\Big|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}y}{2y^2(x^2+y^2)}\\&\quad+\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\Big|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}\\&=\frac{x^2}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2-1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2-1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{x^2+1}.$$

故
$$\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y=-\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\frac{\pi}{4}.$$

同样

$$\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{1+y^2}\right)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}.$$

因此,两个累次积分均收敛.

下面证明积分

$$\iint\limits_{x\geqslant 1,y\geqslant 1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad ①$$

发散.为此,我们只要证明

$$\iint\limits_{x\geqslant 1,1\leqslant y\leqslant x}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad ②$$

发散即可.事实上,若 ① 收敛,则积分

$$\iint\limits_{x\geqslant 1,y\geqslant 1}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

必收敛,从而

$$\iint\limits_{x\geqslant 1,1\leqslant y\leqslant x}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

收敛,即 ② 收敛.

由于

$$I_n=\iint\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant n\\1\leqslant y\leqslant x}}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^n\mathrm{d}x\int_1^x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y,$$

利用分部积分法,可得

$$\int_1^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$
$$=-\frac{x^2}{2y(x^2+y^2)}\Big|_1^x-\int_1^x \frac{x^2dy}{2y^2(x^2+y^2)}$$
$$+\frac{y}{2(x^2+y^2)}\Big|_1^x-\int_1^x \frac{dy}{2(x^2+y^2)}$$
$$=-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2x},$$

故 $$I_n=\int_1^n\left(-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2x}\right)dx=\frac{\pi}{4}-\arctan n+\frac{1}{2}\ln n.$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=+\infty$. 即 ② 发散,因此积分 ① 发散.

计算积分(参数是正值)(4169 ~ 4174).

【4169】 $\displaystyle\iint\limits_{\substack{xy>1\\x>1}}\frac{dxdy}{x^py^q}$.

解 由于被积函数非负,故

$$I=\iint\limits_{\substack{xy\geqslant1\\x\geqslant1}}\frac{dxdy}{x^py^q}=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{dy}{y^q}.$$

当 $q\leqslant 1$ 时,$\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{dy}{y^q}$ 发散

当 $q>1$ 时,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{dy}{y^q}=\frac{x^{q-1}}{q-1}.$$

当 $p\leqslant q$ 时,积分发散

$$I=\frac{1}{q-1}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{p-q+1}}=+\infty.$$

当 $p>q$ 时,

$$I=\frac{1}{q-1}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{p-q+1}}=\frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

综上所述,可知,当 $p>q>1$ 时,

$$\iint\limits_{\substack{xy\geqslant1\\x\geqslant1}}\frac{dxdy}{x^py^q}=\frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

【4170】 $\iint\limits_{\substack{x+y\geqslant 1\\0\leqslant x\leqslant 1}}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^p}$.

解 由于被积函数非负，故

$$I=\iint\limits_{\substack{x+y\geqslant 1\\0\leqslant x\leqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^p}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{(x+y)^p}.$$

当 $p\leqslant 1$ 时，积分发散.

当 $p>1$ 时，

$$\int_{1-x}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{(x+y)^p}=-\frac{1}{p-1}\frac{1}{(x+y)^{p-1}}\bigg|_{1-x}^{+\infty}=\frac{1}{p-1}.$$

故 $$I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{p-1}=\frac{1}{p-1}\qquad(p>1).$$

【4171】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

解 利用极坐标，由于被积函数非负，故

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$=2\pi(-\sqrt{1-r^2})\bigg|_0^1=2\pi.$$

【4172】 $\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^p}$.

解 利用极坐标，由于被积函数非负，故

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^p}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_1^{+\infty}\frac{r\mathrm{d}r}{r^{2p}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{p-1}, & \text{当 } p>1 \text{ 时},\\ +\infty, & \text{当 } p\leqslant 1 \text{ 时}.\end{cases}$$

【4173】 $\iint\limits_{y>x^2+1}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

解 因为$\dfrac{1}{x^4+y^2}>0$，由 4166 题的结论知，二重广义积分的

敛散性等价于二次积分的敛散性且

$$I=\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\frac{\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$$

$$=2\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{y}{x^2}\Big|_{y=x^2+1}^{y=+\infty}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{x}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]\Big|_0^{+\infty}$$

$$+2\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x^3}}{1+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}.$$

设 $a=\sqrt{\sqrt{2}-1}$，$b=\frac{1}{\sqrt{2}}$，则

$$\frac{1}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-(\sqrt{2}-1)x^2}$$

$$=\frac{1}{(x^2+b)^2-(ax)^2}$$

$$=\frac{1}{(x^2+ax+b)(x^2-ax+b)}$$

$$=\frac{1}{2ab}\left[\frac{x+a}{x^2+ax+b}-\frac{x-a}{x^2-ax+b}\right]$$

$$=\frac{1}{4ab}\left[\frac{2x+a}{x^2+ax+b}+\frac{a}{x^2+ax+b}-\frac{2x-a}{x^2-ax+b}\right.$$

$$\left.+\frac{a}{x^2-ax+b}\right].$$

所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{4ab}\int_0^{+\infty}\left[\frac{2x+a}{x^2+ax+b}+\frac{a}{x^2+ax+b}\right.$$
$$\left.-\frac{2x-a}{x^2-ax+b}+\frac{a}{x^2-ax+b}\right]dx$$
$$= \frac{1}{4ab}\ln\left(\frac{x^2+ax+b}{x^2-ax+b}\right)\Big|_0^{+\infty}$$
$$+\frac{1}{4b}\left(\frac{2}{\sqrt{4b-a^2}}\arctan\frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}}\right.$$
$$\left.+\frac{2}{\sqrt{4b-a^2}}\arctan\frac{2x-a}{\sqrt{4b-a^2}}\right)\Big|_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{4b}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{4b-a^2}} = \frac{\pi}{2b\sqrt{4b-a^2}}$$
$$= \frac{\pi}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}}-(\sqrt{2}-1)}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

因此 $$I = 2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+\frac{1}{2}} = 2\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1}}$$
$$= \pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}.$$

【4174】 $\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y} e^{-(x+y)}dxdy.$

解 由于被积函数非负,故

$$\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y} e^{-(x+y)}dxdy = \int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}e^{-(x+y)}dy$$
$$= \int_0^{+\infty}e^{-x}dx\int_x^{+\infty}e^{-y}dy = \int_0^{+\infty}e^{-x}\cdot(-e^{-y})\Big|_x^{+\infty}dx$$
$$= \int_0^{+\infty}e^{-2x}dx = \frac{1}{2}.$$

变换为极坐标,计算积分(4175 ~ 4177).

【4175】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$

解 利用坐标,由于被积函数非负,故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{+\infty} e^{-r^2}rdr$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

【4176】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy.$

解 由于

$$|e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)| \leqslant e^{-(x^2+y^2)},$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$

收敛.故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy,$$

收敛,从而利用极坐标有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\cos r^2 dr = \pi\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos tdt$$

$$= \pi\left(\frac{\sin t-\cos t}{(-1)^2+1^2}e^{-t}\right)\Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

【4177】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy.$

解 由于

$$|e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)| \leqslant e^{-(x^2+y^2)},$$

而积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

收敛,故积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy,$$

收敛,从而利用极坐标有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\sin r^2 dr = \pi\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin tdt$$

$$= \pi \left| \left(\frac{-\sin t - \cos t}{(-1)^2 + 1^2} e^{-t} \right) \right|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

计算积分(4178 ～ 4180).

【4178】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f} dxdy$

其中 $a < 0, ac - b^2 > 0$.

解 因为 $\delta = ac - b^2 > 0$，令 $t = x + \frac{b}{a}y$. 则

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f \\
&= a\left(x^2 + \frac{2b}{a}xy + \frac{b^2}{a^2}y^2\right) + \frac{ac - b^2}{a}y^2 \\
&\quad + 2dx + 2ey + f \\
&= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{\delta}{a}y^2 + 2dx + 2ey + f \\
&= at^2 + \frac{\delta}{a}y^2 + 2d\left(t - \frac{b}{a}y\right) + 2ey + f \\
&= a\left(t^2 + \frac{2d}{a}t + \frac{d^2}{a^2}\right) - \frac{d^2}{a} + \frac{\delta}{a}\left[y^2 + \frac{2}{\delta}(ae \right. \\
&\quad \left. - bd)y + \frac{(ae - bd)^2}{\delta^2}\right] - \frac{(ae - bd)^2}{a\delta} + f \\
&= a\left(t + \frac{d}{a}\right)^2 + \frac{\delta}{a}\left(y + \frac{ae - bd}{\delta}\right)^2 + \beta.
\end{aligned}$$

其中 $$\begin{aligned}
\beta &= f - \frac{d^2}{a} - \frac{(ae - bd)^2}{a\delta} \\
&= \frac{1}{a\delta}\left[af(ac - b^2) - d^2(ac - b)^2 - (ae - bd)^2\right] \\
&= \frac{1}{\delta}\left[acf - b^2 f - cd^2 - ae^2 + 2bde\right] = \frac{\Delta}{\delta},
\end{aligned}$$

这里 $$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

作变量代换

$$\begin{cases} u=\sqrt{-a}x+\dfrac{b\sqrt{-a}}{a}y+\dfrac{d\sqrt{-a}}{a} \\ v=\sqrt{-\dfrac{\delta}{a}}y+\sqrt{-\dfrac{\delta}{a}}\cdot\dfrac{ae-bd}{\delta} \end{cases} \qquad ①$$

则 $$\varphi(x,y)=-u^2-v^2+\beta,$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}}=\frac{1}{\sqrt{\delta}}>0.$$

因此，利用 4175 题的结果有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\varphi(x,y)}dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2-v^2+\beta}\frac{1}{\sqrt{\delta}}dxdy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(u^2+v^2)}dudv=\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}.$$

【4179】 $\displaystyle\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1}e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy.$

解 令

$$x=ar\cos\varphi,y=br\sin\varphi.$$

故积分域为

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,1\leqslant r<+\infty.$$

由于被积函数非负，故

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1}e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^{+\infty}abre^{-r^2}dr$$

$$=2\pi ab\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi ab}{e}.$$

【4180】 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xye^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{x}{a}\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy \qquad (0<|\varepsilon|<1).$

解 令

$$x=ar\cos\varphi,y=br\sin\varphi.$$

则有

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}a^2b^2r^3\sin2\varphi\mathrm{e}^{-r^2(1+\varepsilon\sin2\varphi)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi. \qquad ①$$

又 $$|r^3\sin2\varphi\mathrm{e}^{-r^2(1+\varepsilon\sin2\varphi)}|\leqslant r^3\mathrm{e}^{-r^2(1-|\varepsilon|)},$$

而 $$\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}r^3\mathrm{e}^{-r^2(1-|\varepsilon|)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty}r^3\mathrm{e}^{-r^2(1-|\varepsilon|)}\mathrm{d}r<+\infty.$$

故 ① 中的二重广义积分收敛，所以

$$I=\frac{1}{2}a^2b^2\int_0^{2\pi}\sin2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty}r^3\mathrm{e}^{-r^2(1+\varepsilon\sin2\varphi)}\mathrm{d}r,$$

而 $$\int_0^{+\infty}r^3\mathrm{e}^{-r^2(1+\varepsilon\sin2\varphi)}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t(1+\varepsilon\sin2\varphi)}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2(1+\varepsilon\sin2\varphi)}\left[t\mathrm{e}^{-t(1+\varepsilon\sin2\varphi)}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t(1+\varepsilon\sin2\varphi)}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2(1+\varepsilon\sin2\varphi)}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t(1+\varepsilon\sin2\varphi)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2(1+\varepsilon\sin2\varphi)^2},$$

故 $$I=\frac{1}{4}a^2b^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin2\varphi}{(1+\varepsilon\sin2\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2}a^2b^2\int_0^{\pi}\frac{\sin2\varphi}{(1+\varepsilon\sin2\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{4}a^2b^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin2\theta}{(1+\varepsilon\sin2\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^2b^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{(1+\varepsilon\sin\theta)^2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{(1-\varepsilon\sin\theta)^2}\right]. \qquad ②$$

而 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{(1+\varepsilon\sin\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1+\varepsilon\sin\theta}-\frac{1}{(1+\varepsilon\sin\theta)^2}\right]\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{\text{令 }\theta=\frac{\pi}{2}-u}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1+\varepsilon\cos u}-\frac{1}{(1+\varepsilon\cos u)^2}\right]\mathrm{d}u,$$

同理，有 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{(1-\varepsilon\sin\theta)^2}=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1-\varepsilon\cos u}-\frac{1}{(1-\varepsilon\cos u)^2}\right]\mathrm{d}u.$

而由 2028 题和 2063 题的结果及推导过程知

当 $0<|\varepsilon|<1$ 时,

$$\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+C,$$

$$\begin{aligned}&\int\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}\\&=-\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}\\&\quad+\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+C,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta d\theta}{(1+\varepsilon\sin\theta)^2}\\&=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right.\\&\quad\left.-\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\arctan\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta d\theta}{(1-\varepsilon\sin\theta)^2}\\&=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right.\\&\quad\left.-\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\arctan\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right].\end{aligned}$$

从而,由 ② 式可得

$$\begin{aligned}I=&\frac{1}{\varepsilon}a^2b^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\\&\cdot\left[\arctan\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}+\arctan\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right].\end{aligned}$$

而对任何 $x>0$,有

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

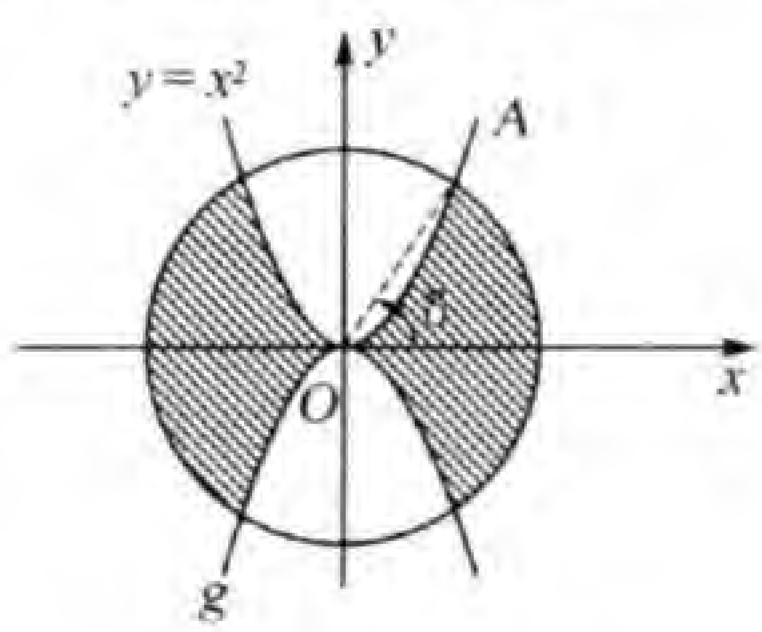
因此 $$I=\frac{1}{\varepsilon}a^2b^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi\varepsilon a^2b^2}{2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

研究不连续函数($0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M<+\infty$)的广义二重积分的收敛性(4181 ~ 4185).

【4181】 $\iint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中域 Ω 由以下条件确定:

$|y|\leqslant x^2$;　　$x^2+y^2\leqslant 1$.

解　积分域 Ω 如 4181 题图所示,利用极坐标,并注意到被积函数的对称与非负性及积分域的对称性有



4181 题图

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=4\int_0^{\delta}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{1}\frac{\mathrm{d}r}{r}=4\int_0^{\delta}\ln\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi,$$

其中 δ 为 4181 题图中 OA 与 Ox 轴的夹角. 而

$$\lim_{\varphi\to+0}\varphi^{\frac{1}{2}}\cdot\ln\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}=\lim_{\varphi\to+0}\left(\frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\cos\varphi\cdot\frac{\ln\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}}{\left(\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}}=0,$$

故积分$\int_0^{\delta}\ln\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi$ 收敛,从而,原积分$\iint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 收敛.

【4182】 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解　由于

$$x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x+y)^2>0$$

(当$(x,y)\neq(0,0)$时),

故当$(x,y)\neq(0,0)$时,

$$\frac{m}{(x^2+xy+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+xy+y^2)^p}$$

$$\leqslant\frac{M}{(x^2+xy+y^2)^p},$$

而广义重积分收敛必绝对收敛. 故积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

与积分 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{(x^2+xy+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

有相同的敛散性. 利用极坐标,并注意到

$$\frac{1}{(x^2+xy+y^2)^p}>0,$$

有 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^p}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^p}\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}}.$$

而$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^p}$为常义积分,

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}}=\begin{cases}\frac{1}{2(1-p)}, & \text{当 } p<1 \text{ 时},\\ +\infty, & \text{当 } p\geqslant 1 \text{ 时},\end{cases}$$

因此当 $p<1$ 时,原积分收敛;当 $p\geqslant 1$ 时,原积分发散.

【4183】 $$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}\qquad(p>0,q>0).$$

解 由对称性知

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}=4\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}$$

$$= 4\iint_{\Omega_1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p + y^q} + 4\iint_{\Omega_2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p + y^q}, \qquad ①$$

其中 $\Omega_1 = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1, x^p + y^q \geqslant 2^{-p-q}\}$,

$\Omega_2 = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1, x^p + y^q \leqslant 2^{-p-q}\}$,

令 $\Omega_3 = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^p + y^q \leqslant 2^{-p-q}$.

易证 $\Omega_2 = \Omega_3$,由于函数 $\frac{1}{x^p + y^q}$ 在 Ω_1 上为连续函数,故 $\iint\limits_{\Omega_1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p + y^q}$ 为常义积分,因此,广义积分 $\iint\limits_{\Omega_3} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p + y^q}$ 的敛散性决定原广义积分的敛散性.

令 $x = r^{\frac{2}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \varphi, y = r^{\frac{2}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \varphi$.

则 $$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \frac{4}{pq} r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1} \sin^{\frac{2}{p}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{p}-1} \varphi,$$

且被积函数非负,所以

$$\iint_{\Omega_3} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p + y^q} = \frac{4}{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{p}-1} \varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}} r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3} \mathrm{d}r.$$

由于当 $p > 0, q > 0$ 时,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{p}-1} \varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right).$$

而积分 $\int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}} r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3} \mathrm{d}r$:

当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 > -1$ 即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ 时收敛.

当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 \leqslant -1$ 即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqslant 1$ 时收敛.

因此,当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ 时,原积分收敛;当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqslant 1$ 时,原积分发散.

【4184】 $\int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 由于

$$\frac{m}{|x-y|^p} \leqslant \frac{|\varphi(x,y)|}{|x-y|^p} \leqslant \frac{M}{|x-y|^p}.$$

并注意到广义重积分收敛必绝对收敛知积分$\int_0^a\int_0^a \frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$与积分$\int_0^a\int_0^a \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^p}$有相同的敛散性. 由对称性知

$$\int_0^a\int_0^a \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^p} = 2\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x-y)^p}.$$

作变量代换 $u=x, v=x-y$. 则有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x-y)^p} = \int_0^a \mathrm{d}u\int_0^u \frac{\mathrm{d}v}{v^p}.$$

当 $p \geqslant 1$ 时, $\int_0^u \frac{\mathrm{d}v}{v^p}$ 发散.

当 $p<1$ 时,

$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}v}{v^p} = \frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{u^{p-1}}.$$

所以 $$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x-y)^p} = \int_0^a \frac{1}{1-p}\frac{1}{u^{p-1}}\mathrm{d}u = \frac{a^{2-p}}{(1-p)(2-p)},$$

因此, 积分$\int_0^a\int_0^a \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^p}$当 $p<1$ 时收敛; 当 $p\geqslant 1$ 时发散.

【4185】 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 由于

$$\frac{m}{(1-x^2-y^2)^p} \leqslant \frac{|\varphi(x,y)|}{(1-x^2-y^2)^p} \leqslant \frac{M}{(1-x^2-y^2)^p}.$$

而广义重积分收敛必绝对收敛, 所以积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

与积分 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1-x^2-y^2)^p},$$

有相同的敛散性. 注意到被积函数

$$\frac{1}{(1-x^2-y^2)^p}>0,$$

并利用极坐标,可得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1-x^2-y^2)^p}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{r}{(1-r^2)^p}\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^1\frac{r}{(1-r^2)^p}\mathrm{d}r,$$

而 $$\lim_{r\to 1-0}(1-r)^p\frac{r}{(1-r^2)^p}=2^{-p}.$$

故积分$\int_0^1\frac{r}{(1-r^2)^p}\mathrm{d}r$当$p<1$时收敛;当$p\geqslant 1$时发散.

综上所述,积分$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$当$p<1$时收敛;当$p\geqslant 1$时发散.

【4186】 证明:若(1) 函数$\varphi(x,y)$在有界域$a\leqslant x\leqslant A,b\leqslant y\leqslant B$是连续的;(2) 函数$f(x)$在区间$a\leqslant x\leqslant A$是连续的;(3) $p<1$,则积分:

$$\int_a^A\mathrm{d}x\int_b^B\frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}\mathrm{d}y\text{ 收敛.}$$

证 若

$$f([a,A])\cap[b,B]=\phi.$$

则被积函数$\frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}$在$[a,A]\times[b,B]$上连续,故积分$\int_a^A\mathrm{d}x\int_b^B\frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}\mathrm{d}y$存在.

下面讨论$f([a,A])\cap[b,B]\neq\phi$的情况,此时积分为瑕积分.

因为$\varphi(x,y)$在有界域$a\leqslant x\leqslant A,b\leqslant y\leqslant B$连续,所以,存在$M>0$,使得$|\varphi(x,y)|\leqslant M$. 从而对任一固定的$x$,设$f(x)\in[b,B]$

$$\left|\int_b^B\frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant \int_b^B \frac{|\varphi(x,y)|}{|f(x)-y|^p}\mathrm{d}y \leqslant M\int_b^B \frac{1}{|f(x)-y|^p}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{M}{1-p}\{[f(x)-b]^{-p+1} + [B-f(x)]^{-p+1}\}$$

由于 $p<1$,故$[f(x)-b]^{-p+1}$,$[B-f(x)]^{-p+1}$ 在$[a,A]$上连续,从而$\int_a^A \frac{M}{1-p}\{[f(x)-b]^{-p+1}+[B-f(x)]^{-p+1}\}\mathrm{d}x$ 收敛,因此$\int_a^A \left|\int_b^B \frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x$ 收敛,从而$\int_a^A\int_b^B \frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ 收敛.

计算以下积分(4187 ~ 4190).

【4187】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解 由于被积函数非负,故利用极坐标并化为累次积分得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^1 r\ln\frac{1}{r}\mathrm{d}r,$$

$$= -2\pi\int_0^1 r\ln r\mathrm{d}r = -2\pi\left(\frac{r^2}{2}\ln r\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{r}{2}\mathrm{d}r\right) = \frac{\pi}{2}.$$

【4188】 $\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} \qquad (a>0).$

解 $\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} = \int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}\mathrm{d}x.$

令 $\qquad x = au.$

则有 $\qquad \int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}\mathrm{d}x = 2a\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u$

$$= 2aB\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = 2a\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$= 2a\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{\pi})^2 = \pi a,$$

所以 $\qquad \int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} = \pi a.$

【4189】 $\iint\limits_{\Omega}\ln\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中域 Ω 由直线 $y=0$，$y=x$，$x=\pi$ 围成.

解 作变量代换

$$x=u+v, y=u-v.$$

则 $|I|=2$，积分域变为 uOv 平面上的 Ω'，Ω' 由直线 $u=v$，$u=0$，$u+v=\pi$ 围成. 并且，被积函数非正，故可化为累次积分

$$\begin{aligned}
\text{所以}\iint\limits_{\Omega}\ln\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2\iint\limits_{\Omega'}\ln\sin 2v\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\int_v^{\pi-v}\ln\sin 2v\mathrm{d}u = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin 2v\mathrm{d}v \\
&= 2\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\mathrm{d}v+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin\mathrm{d}v \\
&\quad +2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\cos v\mathrm{d}v \\
&= \pi^2\ln 2-\frac{\pi^2}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin v\mathrm{d}v+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t\ln\sin t\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi^2}{2}\ln 2+2\pi 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin v\mathrm{d}v,
\end{aligned}$$

由 2353 题的结果知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin v\mathrm{d}v=-\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

因此 $$\iint\limits_{\Omega}\ln\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2.$$

【4190】 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

解 由关于 Ox 轴的对称性及被积函数的非负性，利用极坐标化为累次积分有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant x\\ y\geqslant 0}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} dr = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = 2.$$

研究以下三重积分的收敛性(4191 ～ 4195).

【4191】 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \dfrac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dxdydz$,

这里 $0 < m \leqslant |\varphi(x,y,z)| \leqslant M < +\infty$.

解 由于

$$\frac{m}{(x^2+y^2+z^2)^p} \leqslant \frac{|\varphi(x,y,z)|}{(x^2+y^2+z^2)^p} \leqslant \frac{M}{(x^2+y^2+z^2)^p},$$

且广义重积分收敛必绝对收敛，所以原广义积分与积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)\phi}$ 有相同的敛散性

由于被积函数为正，故利用球坐标

$x = r\cos\varphi\cos\psi, y = r\sin\varphi\cos\psi, z = \sin\psi.$

可得 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-2}} = 4\pi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-2}}.$$

显然当 $p > \dfrac{3}{2}$ 时，$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-2}}$ 收敛；当 $p \leqslant \dfrac{3}{2}$ 时，$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-2}}$ 发散

因此，积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \dfrac{\phi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dxdydz$，当 $p > \dfrac{3}{2}$ 时，收敛，当 $p \leqslant \dfrac{3}{2}$ 时，发散.

【4192】 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \dfrac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dxdydz$,

这里 $0 < m \leqslant |\varphi(x,y,z)| \leqslant M < +\infty$.

解 与前题同样的讨论，知积分

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dxdydz$$

与积分

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p},$$

有相同的敛散性. 而利用球坐标有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}=4\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}.$$

当 $p<\frac{3}{2}$ 时, $\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}$ 收敛, 当 $p\geqslant\frac{3}{2}$ 时, $\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}$ 发散. 故原积分当 $p<\frac{3}{2}$ 时收敛否则发散.

【4193】 $$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$$

$(p>0,q>0,r>0)$.

解 由对称性有

$$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$$

$$=8\iiint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\\ x+y+z>1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}$$

$$=8\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}+8\iiint\limits_{\Omega_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r},$$

其中

$\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,x+y+z>1,x^p+y^q+z^r\leqslant 3\}$,

$\Omega_2=\{(x,y,z)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,x+y+z>1,x^p+y^q+z^r>3\}$.

令

$$\Omega_3=\{(x,y,z)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,x^p+y^q+z^r>3\},$$

可证 $\Omega_2=\Omega_3$. 显然, $\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}$ 为常义积分. 故只须讨论

$\iiint\limits_{\Omega_3} \frac{dxdydz}{x^p + y^q + z^r}$ 的敛散性. 作变量代换

$$x = \rho^{\frac{2}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \varphi \cos^{\frac{2}{p}} \psi, y = \rho^{\frac{2}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \varphi \cos^{\frac{2}{q}} \psi,$$

$$z = \rho^{\frac{2}{r}} \sin^{\frac{2}{r}} \psi.$$

则

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\psi)} = \frac{8}{pqr} \rho^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-1} \cos^{\frac{2}{p}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{q}-1} \varphi \cdot \sin^{\frac{2}{r}-1} \psi \cos^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1} \psi.$$

故由被积函数的非负性，并利用 3856 题的结果有

$$\iiint\limits_{\Omega_3} \frac{dxdydz}{x^p + y^q + z^r}$$

$$= \frac{8}{pqr} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{p}-1} \varphi d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{r}-1} \psi \cos^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1} \psi d\psi \cdot \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \rho^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3} d\rho$$

$$= \frac{8}{pqr} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \cdot \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \rho^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3} d\rho.$$

积分 $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \rho^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3} d\rho$ 当

$$\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3 < -1,$$

即

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1,$$

时收敛，当

$$\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3 \geqslant -1,$$

即

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geqslant 1,$$

时发散. 因此，积分

$$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z| \geqslant 1} \frac{dxdydz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r},$$

当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ 时收敛，当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geqslant 1$ 时发散.

【4194】 $\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$,

这里 $0<m\leqslant|f(x,y,z)|\leqslant M<+\infty$

而 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区间 $[0,a]$ 连续.

解 由于

$$\frac{m}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$
$$\leqslant\frac{|f(x,y,z)|}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$
$$\leqslant\frac{M}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

从而,原广义积分与积分

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p},$$

有相同的敛散性. 由被积函数

$$\frac{1}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p},$$

的非负性,有

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}=\int_0^a F(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $$F(x)=\int_0^a\int_0^a \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

$$(0\leqslant x\leqslant a).$$

作变量代换

$$u=y-\varphi(x),v=z-\psi(x)\qquad(x\text{ 固定}).$$

则 $$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(y,z)}}=1,$$

从而,有 $$F(x)=\iint\limits_{\substack{-\varphi(x)\leqslant u\leqslant a-\varphi(x)\\ -\psi(x)\leqslant v\leqslant a-\psi(x)}}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^p},\qquad ①$$

若 $p<1$,令

$$C=\max_{0\leqslant x\leqslant a}(|\varphi(x)|+|\psi(x)|).$$

则由 ① 式知

$$
\begin{aligned}
0 < F(x) &\leqslant \iint\limits_{\substack{-\varepsilon\leqslant u\leqslant a+\varepsilon\\ -\varepsilon\leqslant v\leqslant a+\varepsilon}} \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^p} \\
&< \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 2(a+\varepsilon)^2} \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^p} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}(a+\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}} \\
&= \frac{\pi}{1-p}[\sqrt{2}(a+\varepsilon)]^{2-2p}.
\end{aligned}
$$

即 $F(x)$ 有界，从而$\int_0^a F(x)\mathrm{d}x$ 是常义积分，因此此时积分

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p},$$

收敛.

若 $p\geqslant 1$.

Ⅰ. 如果

$$\varphi([0,a])\cap[0,a]=\phi,$$

或 $$\psi([0,a])\cap[0,a]=\phi,$$

则 $$\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p>0.$$

从而积分

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p},$$

为常义积分，从而收敛.

Ⅱ. 如果存在 $x_0\in[0,a]$ 使 $0<\varphi(x_0)<a$，$0<\psi(x_0)<a$ 同时成立. 由 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 的连续性知必存在 $\varepsilon>0$ 及闭区间 $I_0\subset[0,a]$ 使得当 $x\in I_0$ 时恒有 $\varepsilon\leqslant\varphi(x)\leqslant a-\varepsilon$，$\varepsilon\leqslant\psi(x)\leqslant a-\varepsilon$. 从而由 ① 式知，当 $x\in I_0$ 时，有

$$
\begin{aligned}
F(x) &\geqslant \iint\limits_{\substack{-\varepsilon\leqslant u\leqslant\varepsilon\\ -\varepsilon\leqslant v\leqslant\varepsilon}} \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^p} \geqslant \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant\varepsilon^2} \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^p} \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}} = +\infty \qquad (p\geqslant 1).
\end{aligned}
$$

即当 $x\in I_0$ 时，$F(x)=+\infty$. 因此，积分

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p},$$

发散. 综上所述，我们有积分

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}.$$

当 $p<1$ 时收敛；当 $p\geqslant 1$ 时，若

$$\varphi([0,a])\cap[0,a]=\phi,$$

或 $$\psi([0,a])\cap[0,a]=\phi,$$

则收敛. 若存在 $x\in[0,a]$ 使 $0<\varphi(x)<a$ 且 $0<\psi(x)<a$，则发散.

【4195】 $$\iiint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1,|z|\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x+y-z|^p}$$

解 由对称性有

$$\iiint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1,|z|\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x+y-z|^p}$$

$$=2\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1,|z|\leqslant 1\\ x+y-z\geqslant 0}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x+y-z|^p}$$

$$=2\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\\ -1\leqslant x+y\leqslant 1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{-1}^{x+y}\frac{\mathrm{d}z}{(x+y-z)^p}$$

$$+2\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1\\ x+y\geqslant 1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}z}{(x+y-z)^p}$$

$$=2I_1+2I_2.$$

若 $p<1$，则

$$\int_{-1}^{x+y}\frac{\mathrm{d}z}{(x+y-z)^p}=\frac{(x+y+1)^{1-p}}{1-p}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}z}{(x+y-z)^p}=\frac{(x+y+1)^{1-p}-(x+y-1)^{1-p}}{p-1}$$

$$(x+y\geqslant 1),$$

故
$$I_1=\frac{1}{1-p}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\\ -1\leqslant x+y\leqslant 1}}(x+y+1)^{1-p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$I_2=\frac{1}{p-1}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\\ x+y\geqslant 1}}[(x+y+1)^{1-p}-(x+y-1)^{1-p}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
此时 I_1,I_2 均为常义二重积分,当然收敛.因此,原积分收敛.

若 $p\geqslant 1$,则当 $x+y>-1$ 时,
$$\int_{-1}^{x+y}\frac{\mathrm{d}z}{(x+y-z)^p}=+\infty.$$
故 $I_1=+\infty$,又显然 $I_2>0$,故积分 $\iiint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1,|z|\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x+y-z|^p}$,发散.

计算积分(4196 ~ 4199).

【4196】 $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^py^qz^r}.$

解 由于被积函数非负,故
$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^py^qz^r}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\cdot\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{y^q}\cdot\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{z^r}$$
$$=\frac{1}{(1-p)(1-q)(1-r)}$$
(若 $p<1,q<1,r<1$).

若 $p\geqslant 1$ 或 $q\geqslant 1$ 或 $r\geqslant 1$,则
$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^py^qz^r}=+\infty.$$

【4197】 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$

解 利用球坐标并注意到被积函数的非负性,有
$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^4}=\frac{4\pi}{3}.$$

【4198】 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}.$

解 利用球坐标,并注意被积函数的非负性,有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\int_0^1\frac{r^2}{(1-r^2)^p}\mathrm{d}r=4\pi\int_0^1\frac{r^2}{(1-r^2)^p}\mathrm{d}r.$$

令 $t=r^2$,则当 $p<1$ 时有

$$\int_0^1\frac{r^2}{(1-r^2)^p}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-p}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2},1-p\right).$$

从而,当 $p<1$ 时,有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}=2\pi B\left(\frac{3}{2},1-p\right).$$

若 $p\geqslant 1$,则

$$\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-p}\mathrm{d}t=+\infty,$$

故此时 $$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}=+\infty.$$

【4199】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

解 利用球坐标,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=4\pi\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r.$$

令 $r^2=t$,则有

$$\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

因此 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi^{\frac{3}{2}}.$$

【4200】 计算积分:$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-P(x_1,x_2,x_3)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3.$

其中 $P(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$,

为正定二次型.

解 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.$$

由于二次型 $P(x_1,x_2,x_3)$ 是正定的,故由高等代数中关于二次型的理论知,存在正交矩阵

$$T=\begin{pmatrix}t_{11}&t_{12}&t_{13}\\t_{21}&t_{22}&t_{23}\\t_{31}&t_{32}&t_{33}\end{pmatrix},$$

使
$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}, \qquad ①$$

其中 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_3>0$,即存在(正交)线性变换

$$\begin{cases}x_1=t_{11}x'_1+t_{12}x'_2+t_{13}x'_3\\x_2=t_{21}x'_1+t_{22}x'_2+t_{23}x'_3\\x_3=t_{31}x'_1+t_{32}x'_2+t_{23}x'_3\end{cases}$$

使得 $P(x_1,x_2,x_3)=\lambda_1x'^2_1+\lambda_2x'^2_2+\lambda_3x'^2_3$.

由于 T 正交,故

$$\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(x'_1,x'_2,x'_3)}=|T|=\pm 1,$$

因此 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-P(x_1,x_2,x_3)}dx_1dx_2dx_3$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_1x'^2_1-\lambda_2x'^2_2-\lambda_3x'^2_3}dx'_1dx'_2dx'_3.$$

再作变量代换

$$x'_1=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}u_1,x'_2=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}u_2,x'_3=\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}u_3.$$

则 $$\frac{D(x'_1,x'_2,x'_3)}{D(u_1,u_2,u_3)}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}.$$

并利用 4199 题的结果有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_1x'^2_1-\lambda_2x'^2_2-\lambda_3x'^2_3}dx'_1dx'_2dx'_3$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(u_1^2+u_2^2+u_3^2)}du_1du_2du_3=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}.$$

记 $\Delta=|A|$，则 $\Delta>0$，由 ① 式知

$$\Delta=|A|=|T|\cdot|T^{-1}|\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

因此，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-p(x_1,x_2,x_3)}dx_1dx_2dx_3=\sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}.$$

§10. 多重积分

1. **多重积分的直接计算** 若函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在有界域 Ω 是连续的，域 Ω 可用不等式定义：

$$\begin{cases}x'_1\leqslant x_1\leqslant x''_1,\\ x'_2(x_1)\leqslant x_2\leqslant x''_2(x_1),\\ \cdots\cdots\\ x'_n(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\leqslant x_n\leqslant x''_n(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),\end{cases}$$

其中 x'_1 与 x''_1 为常数和 $x'_2(x_1),x''_2(x_1),\cdots,x'_n(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),x''_n(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ 为连续函数，则相应的多重积分可以按照下式计算：

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n.$$

$$=\int_{x'_1}^{x''_1}dx_1\int_{x'_2(x_1)}^{x''_2(x_1)}dx_2\cdots\int_{x'_n(x_1,\cdots,x_{n-1})}^{x''_n(x_1,\cdots,x_{n-1})}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_n.$$

2. **多重积分中的变量代换** 若 1) 函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在有界可测域 Ω 是一致连续的；2) 连续可微分函数

$$x_i=\varphi_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\qquad(i=1,2,\cdots,n),$$

可实现空间 $Ox_1x_2\cdots x_n$ 的域 Ω 双方单值映射为空间 $O\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$ 的有界域 Ω';3) 函数行列式

$$I=\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)},$$

在域 Ω' 几乎都保持符号不变(零测度集除外). 则下式是正确的:

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)\mid I\mid \mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n.$$

特别是在变换成极坐标$(r,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$时,按照公式:

$$x_1=r\cos\varphi_1,$$

$$x_2=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_{n-1}=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},$$

$$x_n=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1},$$

有 $$I=\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})}$$

$$=r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}.$$

【4201】 设 $K(x,y)$ 为在域 $R(a\leqslant x\leqslant b;a\leqslant y\leqslant b)$ 内的连续函数且 $K_n(x,y)$

$$=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_n,y)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n.$$

证明:

$$K_{n+m+1}(x,y)=\int_a^b K_n(x,t)K_m(t,y)\mathrm{d}t.$$

证 $K_{n+m+1}(x,y)$

$$=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_n,t)K(t,z_1)K(z_1,z_2)\cdots$$

$$K(z_m,y)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n\mathrm{d}t\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\cdots\mathrm{d}z_m$$

$$=\int_a^b\left\{\left[\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_n,t)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n\right]\right.$$

$$\cdot\left[\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(t,z_1)K(z_1,z_2)\cdots K(z_m,y)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\cdots\mathrm{d}z_m\right]\Big\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b K_n(x,t)K_m(t,y)\mathrm{d}t.$$

【4202】 设 $f=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在域 $0\leqslant x_i\leqslant x(i=1,2,\cdots,n)$ 内是连续函数. 证明等式:

$$\int_0^x \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f\mathrm{d}x_n=\int_0^x \mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x \mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f\mathrm{d}x_1 \qquad (n\geqslant 2).$$

证 设

$$\Omega=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_i\leqslant x,i=1,2,\cdots,n\},$$

$$\Omega_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_1\leqslant x,0\leqslant x_2\leqslant x_1,\cdots,0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\},$$

$$\Omega_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_n\leqslant x,x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant x,\cdots,x_2\leqslant x_1\leqslant x\}.$$

由假设知 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在域 Ω 上连续,显然 $\Omega_1\subset\Omega$,$\Omega_2\subset\Omega$,故 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 Ω_1 及 Ω_2 上连续,根据化 n 重积分为累次积分的公式,我们有

$$\iint\limits_{\Omega_1}\cdots\int f\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f\mathrm{d}x_n,$$

$$\iint\limits_{\Omega_2}\cdots\int f\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_0^x\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f\mathrm{d}x_1.$$

下面证明 $\Omega_1=\Omega_2$,事实上,若 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega_1$,则

$$0\leqslant x_1\leqslant x,0\leqslant x_2\leqslant x_1,\cdots,0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}, \qquad ①$$

即有 $$0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant x_{n-2}\cdots\leqslant x_2\leqslant x_1\leqslant x. \qquad ②$$

于是 $$0\leqslant x_n\leqslant x,x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant x,\cdots,x_2\leqslant x_1\leqslant x, \qquad ③$$

因此,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega_2$,反之,若 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega_2$,则③式成立,从而②式成立,立可得①式成立,即 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega_1$,故 $\Omega_1=\Omega_2$,从而

$$\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f\mathrm{d}x_n=\int_0^x\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f\mathrm{d}x_1.$$

【4203】 证明:

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)dt_n$$
$$=\frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}^n,$$

其中 f 为连续函数.

证 有

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_2} dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)dt_n$$
$$=\int_0^t f(t_1)dt_1\int_0^{t_1} f(t_2)dt_2\cdots\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n.$$

令 $F(s)=\int_0^s f(\tau)d\tau.$

因为 f 是连续函数,故

$$F'(s)=f(s).$$

且 $F(0)=0$,我们有

$$\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$
$$=\int_0^{t_{n-2}} F(t_{n-1})f(t_{n-1})dt_{n-1}=\int_0^{t_{n-2}} F(t_{n-1})F'(t_{n-1})dt_{n-1}$$
$$=\frac{1}{2}[F(t_{n-1})]^2\Big|_{t_{n-1}=0}^{t_{n-1}=t_{n-2}}=\frac{1}{2}[F(t_{n-2})]^2,$$

从而
$$\int_0^{t_{n-3}} f(t_{n-2})dt_{n-2}\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$
$$=\int_0^{t_{n-3}}\frac{1}{2}[F(t_{n-2})]^2 f(t_{n-2})dt_{n-2}$$
$$=\int_0^{t_{n-3}}\frac{1}{2}[F(t_{n-2})]^2 F'(t_{n-2})dt_{n-2}=\frac{1}{3!}[F(t_{n-3})]^3$$

… ….

依此类推可得

$$\int_0^{t_1} f(t_2)dt_2\cdots\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$
$$=\frac{1}{(n-1)!}[F(t_1)]^{n-1},$$

因此　$$\int_0^t f(t_1)\int_0^{t_1}(t_2)\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\mathrm{d}t_n$$

$$=\int_0^t \frac{1}{(n-1)!}[F(t_1)]^{n-1}F'(t_1)\mathrm{d}t_1$$

$$=\frac{1}{n!}[F(t)]^n=\frac{1}{n!}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^n.$$

计算下列多重积分(4204 ～ 4207).

【4204】 (1) $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$;

(2) $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

解 (1) $$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\sum_{i=1}^n\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 x_i^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

而　$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 x_i^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^1 x_i^2\mathrm{d}x_i\cdots\int_0^1\mathrm{d}x_n=\frac{1}{3},$$

因此　$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{n}{3}.$$

(2) $$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$\begin{aligned}=\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^1[&(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\\&+2(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots\\&+x_2x_n+x_3x_4+\cdots+x_3x_n+\cdots+x_{n-1}x_n]\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^1(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_n\\&+2\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^1[(x_1x_2+\cdots+x_1x_n)\\&+(x_2x_3+\cdots+x_2x_n)+\cdots+x_{n-1}x_n]\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

$$=\frac{n}{3}+2\left(\frac{n-1}{4}+\frac{n-2}{4}+\cdots+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{n}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(3n+1)}{12}.$$

【4205】 $I_n = \underset{\substack{x_1>0,x_2>0,\cdots,x_n>0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant a}}{\iint\cdots\int} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$

解 法一:化为累次积分有

$$I_n = \int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^{a-x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{a-x_1-x_2-\cdots-x_{n-2}} \mathrm{d}x_{n-1} \int_0^{a-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1}} \mathrm{d}x_n$$

$$= \int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^{a-x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{a-x_1-x_2-\cdots-x_{n-2}} (a - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})\mathrm{d}x_{n-1}$$

$$= \int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^{a-x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}} \left[-\frac{1}{2}(a-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1})^2\right]\Bigg|_{x_{n-1}=0}^{x_{n-1}=a-x_1-\cdots-x_{n-2}} \mathrm{d}x_{n-2}$$

$$= \frac{1}{2!}\int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^{a-x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{a-x_1-x_2-\cdots-x_{n-3}} (a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2\mathrm{d}x_{n-2}$$

$$= \frac{1}{3!}\int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^{a-x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-4}} (a-x_1-\cdots-x_{n-3})^3\mathrm{d}x_{n-3}$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^a (a-x_1)^{n-1}\mathrm{d}x_1 = \frac{a^n}{n!}.$$

法二:作变量代换

$$x_1 = au_1, x_2 = au_2, \cdots, x_n = au_n.$$

则 $$\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(u_1,u_2,\cdots u_n)} = a^n.$$

积分域变为:$u_1 \geqslant 0, u_2 \geqslant 0, \cdots u_n \geqslant 0,$

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant 1,$$

因此 $I_n = a^n \underset{\substack{u_1\geqslant 0,u_2\geqslant 0,\cdots,u_n\geqslant 0\\ u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int} \mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n = a^n I_n(1),$

其中 $I_n(1)$ 表示当 $a=1$ 时积分 I_n 的值,再次运用变量代换有

$$I_n(1)=\int_0^1 \mathrm{d}u_n \underset{\substack{u_1\geqslant 0,\cdots,u_{n-1}\geqslant 0\\ u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}\leqslant 1-u_n}}{\iint\cdots\int} \mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_{n-1}$$

$$=\int_0^1(1-u_n)^{n-1}I_{n-1}(1)\mathrm{d}u_n$$

$$=\frac{I_{n-1}(1)}{n}=\frac{I_{n-2}(1)}{n(n-1)}=\cdots=\frac{1}{n!},$$

因此 $I_n=\dfrac{a^n}{n!}$.

【4206】 $\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}x_1x_2\cdots x_n\mathrm{d}x_n$.

解 利用 4203 题的结果有

$$\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}x_1x_2\cdots x_n\mathrm{d}x_n=\frac{1}{n!}\left(\int_0^1\tau\mathrm{d}\tau\right)^n=\frac{1}{2^nn!}.$$

【4207】 $\underset{\substack{x_1>0,x_2>0,\cdots,x_n>0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int}\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$

解 作变量代换

$$u_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

$$u_2=\frac{x_2+x_3+\cdots+x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n},$$

$$\cdots,$$

$$u_n=\frac{x_u}{x_{n-1}+x_n},$$

即

$$x_1=u_1(1-u_2),$$

$$x_2=u_1u_2(1-u_3),$$

$$\cdots,$$

$$x_{n-1}=u_1u_2\cdots u_{n-1}(1-u_n),$$

$$x_n=u_1u_2\cdots u_n.$$

则积分域变为:$0\leqslant u_1\leqslant 1,0\leqslant u_2\leqslant 1,\cdots,0\leqslant u_n\leqslant 1$,

$$I=\begin{vmatrix} 1-u_2 & -u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ u_2(1-u_3) & u_1(1-u_3) & -u_1u_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_2u_3\cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_1u_3\cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_1u_2u_4\cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_1u_2\cdots u_{n-2}(1-u_n) & -u_1u_2\cdots u_{n-1} \\ u_2u_3\cdots u_n & u_1u_3\cdots u_n & u_1u_2u_4\cdots u_n & u_1u_2\cdots u_{n-2}u_n & u_1u_2\cdots u_{n-1} \end{vmatrix},$$

每一行加以以后积各行,可得

$$I=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & u_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & u_1u_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \cdots & \cdots \\ & & & & u_1u_2\cdots u_{n-2} & 0 \\ & & & & & u_1u_2\cdots u_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=u_1^{n-1}u_2^{n-2}\cdots u_{n-1},$$

因此 $$\underset{\substack{x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 0}}{\iint\cdots\int}\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 u_1^{n-\frac{1}{2}}u_2^{n-2}\cdots u_{n-1}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n$$

$$=\frac{2}{(n-1)!(2n+1)}.$$

【4208】 若 $\Delta=|a_{ij}|\neq 0$,求由平面

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=\pm h_i \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

所围的 n 维平行 $2n$ 体的体积.

解 令

$$u_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n,i=1,2,\cdots,n.$$

则 $$-h_i\leqslant u_i\leqslant h_i \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

$$|I|=\frac{1}{|\Delta|},$$

所以 $$V=\int_{-h_1}^{h_1}\int_{-h_2}^{h_2}\cdots\int_{-h_n}^{h_n}\frac{1}{|\Delta|}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n$$

$$=\frac{2^nh_1\cdot h_2\cdots h_n}{|\Delta|}.$$

【4209】 求 n 维角锥体的体积：

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\leqslant 1$$

$(x_i\geqslant 0, a_i>0, i=1,2,\cdots,n)$.

解 令

$$u_i=\frac{x_i}{a_i}\qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

则体积为

$$V=a_1a_2\cdots a_n\underset{\substack{u_1\geqslant 0,u_2\geqslant 0,\cdots,u_n\geqslant 0\\ u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}.$$

【4210】 求由曲面 $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{x_n^2}{a_n^2}$, $x_n=a_n$，所围的 n 维锥体的体积.

解 作变量代换

$$x_1=a_1r\cos\varphi,$$

$$x_2=a_2r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$\cdots$$

$$x_{n-2}=a_{n-2}r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2},$$

$$x_{n-1}=a_{n-1}r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2},$$

$$x_n=a_nu_n,$$

则域 V 为

$$0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\varphi_1\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi_2\leqslant\pi,\cdots,$$

$$0\leqslant\varphi_{n-3}\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi_{n-2}\leqslant 2\pi, r\leqslant u_n\leqslant 1,$$

$$|I|=a_1a_2\cdots a_nr^{n-2}\sin^{n-3}\varphi_1\sin^{n-4}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-3},$$

因此，体积为

$$V=a_1a_2\cdots a_n\int_0^1 r^{n-2}\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\sin^{n-3}\varphi_1\mathrm{d}\varphi_1\cdots$$

$$\int_0^{\pi}\sin\varphi_{n-3}\mathrm{d}\varphi_{n-3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_{n-2}\int_r^1\mathrm{d}u_n$$

$$= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-3}\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_1 \cdots 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi_{n-3} \mathrm{d}\varphi_{n-3}$$

$$= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot B\left(\frac{n-2}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\cdot B\left(\frac{n-3}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdots B\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$\cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-3}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-3}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n \cdot \pi^{\frac{n-3}{2}}}{n(n-1) \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} \cdot a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

【4211】 求 n 维球体的体积：

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant a^2.$$

解 令

$$x_1 = r\cos\varphi_1,$$

$$x_2 = r\sin\varphi_1 \cos\varphi_2,$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$x_{n-1} = r\sin\varphi_1 \sin\varphi \cdots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1},$$

$$x_n = r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1},$$

则 $$I = r^{n-1} \sin^{n-2} \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2}.$$

域 V 为

$$0\leqslant r\leqslant a,0\leqslant \varphi_1\leqslant \pi,\cdots,0\leqslant \varphi_{n-2}\leqslant \pi,0\leqslant \varphi_{n-1}\leqslant 2\pi.$$

体积为 $V=\underset{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2}{\iint\cdots\int} dx_1dx_2\cdots dx_n$,

$$\int_0^a r^{n-1}dr\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\int_0^\pi \sin^{n-3}\varphi_2 d\varphi_2\cdots\int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}d\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}d\varphi_{n-1}$$

$$=\frac{2\pi}{n}a^n\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\varphi_1 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-3}\varphi_2 d\varphi_2\cdots 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi_{n-2}d\varphi_{n-2}$$

$$=\frac{2\pi}{n}a^n\cdot B\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot B\left(\frac{n-2}{2},\frac{1}{2}\right)\cdots B\left(\frac{2}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{2\pi}{n}a^n\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\frac{\pi a^n\cdot\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-2}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{\pi a^n\cdot(\sqrt{\pi})^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}=\frac{a^n\cdot\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

【4212】 求$\underset{\Omega}{\iint\cdots\int}x_n^2dx_1dx_2\cdots dx_n$，其中域 Ω 由以下不等式确定：

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant a^2,-\frac{h}{2}\leqslant x_n\leqslant\frac{h}{2}.$$

解 利用 4211 题的结果可得

$$\underset{\Omega}{\iint\cdots\int}x_n^2dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}x_n^2dx_n\underset{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant a^2}{\iint\cdots\int}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}$$

$$=\frac{h^3}{12}\cdot\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\cdot a^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}.$$

【4213】 计算:

$$\iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1}\cdots\int\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}.$$

解 利用 4211 题结果有

$$\iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1}\cdots\int\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}$$

$$=\iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant 1}\cdots\int\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots$$

$$\mathrm{d}x_{n-1}\int_{-\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}\frac{\mathrm{d}x_n}{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2-x_n^2}}$$

$$=\iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant 1}\cdots\int\arcsin\frac{x_n}{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}\Bigg|_{x_n=-\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}^{x_n=\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}$$

$$=\pi\iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant 1}\cdots\int\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}=\pi\cdot\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}=\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

【4214】 证明不等式:

$$\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\mathrm{d}x_n=\int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}u.$$

证 根据 4202 题结果有

$$\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\mathrm{d}x_n$$

$$=\int_0^x f(x_n)\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\int_{x_{n-1}}^x\mathrm{d}x_{n-2}\cdots\int_{x_2}^x\mathrm{d}x_1$$

$$=\int_0^x f(x_n)\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\int_{x_{n-1}}^x\mathrm{d}x_{n-2}\cdots\int_{x_3}^x(x-x_2)\mathrm{d}x_2$$

$$=\int_0^x f(x_n)\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\int_{x_{n-1}}^x\mathrm{d}x_{n-2}\cdots\int_{x_4}^x\frac{1}{2}(x-x_3)\mathrm{d}x_3$$

$$= \int_0^x f(x_n)\mathrm{d}x_n \int_{x_n}^x \mathrm{d}x_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x \mathrm{d}x_{n-2} \cdots \int_{x_3}^x \frac{1}{3!}(x-x_1)^3 \mathrm{d}x_1$$

$$= \cdots$$

$$= \int_0^x f(x_n)\mathrm{d}x_n \int_{x_n}^x \frac{1}{(n-2)!}(x-x_{n-1})^{n-2}\mathrm{d}x_{n-1}$$

$$= \int_0^x f(x_n)\frac{1}{(n-1)!}(x-x_n)^{n-1}\mathrm{d}x_n$$

$$= \int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}u.$$

【4215】 证明等式：

$$\int_0^x x_1\mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} x_2\mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_n} f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\int_0^x (x^2-u^2)^n f(u)\mathrm{d}u.$$

证 根据 4202 题的结果有

$$\int_0^x x_1\mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} x_2\mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_n} f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}$$

$$= \int_0^x f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n\mathrm{d}x_n \int_{x_n}^x x_{n-1}\mathrm{d}x_{n-1} \cdots \int_{x_2}^x x_1\mathrm{d}x_1$$

$$= \int_0^x f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n\mathrm{d}x_n \int_{x_n}^x x_{n-1}\mathrm{d}x_{n-1} \cdots \int_{x_3}^x \frac{1}{2}(x^2-x_2^2)x_2\mathrm{d}x_2$$

$$= \int_0^x f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n\mathrm{d}x_n \int_{x_n}^x x_{n-1}\mathrm{d}x_{n-1} \cdots \int_{x_4}^x \frac{1}{2^2\cdot 2}(x^2-x_3^2)^2 x_3\mathrm{d}x_3$$

$$= \cdots$$

$$= \int_0^x f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}(x^2-x_n^2)^{n-1}x_n\mathrm{d}x_n$$

$$= \int_0^x \frac{1}{2^n n!}(x^2-x_{n+1}^2)^n f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\int_0^x (x^2-u^2)^n f(u)\mathrm{d}u.$$

【4216】 证明狄利克雷公式：

$$\underset{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_n>0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int} x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)} \qquad (p_1,p_2,\cdots,p_n>0).$$

证 应用数学归纳法证明

当 $n=1$ 时,

$$I_1 = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{p_1} = \frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+1)}.$$

即当 $n=1$ 时,公式成立. 假设当 $n=k$ 时公式成立,即

$$I_k = \underset{\substack{x_1,x_2,\cdots x_k\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_k\leqslant 1}}{\iiint\cdots\int} x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_k^{p_k-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_k$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_k)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_k+1)}.$$

下面证明当 $n=k+1$ 时,公式成立.

$$I_{k+1} = \underset{\substack{x_1,x_2,\cdots x_k+1\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_k\leqslant 1}}{\iint\cdots\int} x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_k^{p_k-1}x_{k+1}^{p_{k+1}-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{k+1}$$

$$= \int_0^1 x_{k+1}^{p_{k+1}-1}\mathrm{d}x_{k+1} \underset{\substack{x_1,x_2,\cdots x_k\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_k\leqslant 1-x_{k+1}}}{\iint\cdots\int} x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots$$

$$x_k^{p_k-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_k.$$

在里面的 k 重积分作变量代换

$$x_1=(1-x_{k+1})u_1, x_2=(1-x_{k+1})u_2\cdots,$$

$$x_k=(1-x_{k+1})u_k,$$

则得

$$I_{k+1} = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_k)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_k+1)}\int_0^1 x_{k+1}^{p_{k+1}-1}$$

$$(1-x_{k+1})^{p_1+p_2+\cdots+p_k}\mathrm{d}x_{k+1}$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_k)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_k+1)}$$

$$\cdot B(p_{k+1},p_1+p_2+\cdots+p_k+1)$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_k)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_k+1)}$$

$$\cdot \frac{\Gamma(p_{k+1})\cdot\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_k+1)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}+1)}$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{k+1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{k+1}+1)}.$$

由归纳法知，公式对任何自然数 n 均成立.

【4217】 证明刘维尔公式：

$$\underset{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}{\int\int\cdots\int} f(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}\int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}\mathrm{d}u$$

$$(p_1,p_2,\cdots,p_n>0),$$

其中 $f(u)$ 为连续函数.

提示：运用数学归纳法.

证 应用数学归纳法证明

当 $n=1$ 时，公式显然成立. 下面证明当 $n=2$ 时，公式也成立. 即

$$\iint\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\\ x_1+x_2\leqslant 1}} f(x_1+x_2)x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)}\int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2-1}\mathrm{d}u.$$

事实上，令 $u_1=x_1, u_2=x_1+x_2$.

则积分域 Ω 变为

$$0\leqslant u_1\leqslant u_2, 0\leqslant u_2\leqslant 1, \mid I\mid=1,$$

所以 $$\iint\limits_{\Omega} f(x_1+x_2)x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$=\int_0^1 f(u_2)\mathrm{d}u_2\int_0^{u_2}u_1^{p_1-1}(u_2-u_1)^{p_2-1}\mathrm{d}u_1.$$

令 $t=\dfrac{u_1}{u_2}$,

则 $$\int_0^{u_2}u_1^{p_1-1}(u_2-u_1)^{p_2-1}\mathrm{d}u_1$$

$$=\int_0^1 u_2^{p_1+p_2-1}t^{p_1-1}(1-t)^{p_2-1}\mathrm{d}t=u_2^{p_1+p_2-1}\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)},$$

从而
$$\iint\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\\x_1+x_2\leqslant 1}} f(x_1+x_2)x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)}\int_0^1 f(u_2)u^{p_1+p_2-1}\mathrm{d}u_2$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_2+p_2)}\int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2-1}\mathrm{d}u.$$

其次，假设公式对 $n-1$ 成立. 下证公式对自然数 n 也成立. 事实上
$$I_n=\iint\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\\x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}\cdots\int f(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots$$
$$x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$=\iint\limits_{\substack{x_1,x_2\cdots x_{n-1}\geqslant 0\\x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\leqslant 1}}\cdots\int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}$$
$$\int_0^{1-(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})} f(x_1+x_2+\cdots x_n)x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_n.$$

令 $\quad \psi(t)=\int_0^{1-t} f(t+x_n)x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_n,$

代入上式，并利用归纳假设有
$$I_n=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}\int_0^1\psi(t)t^{p_1+p_2+\cdots p_{n-1}-1}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}\int_0^1\mathrm{d}t\int_0^{1-t} f(t+x_n)x_n^{p_n-1}$$
$$\cdot t^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}\mathrm{d}x_n.$$

再利用上面已证的 $n=2$ 时的公式有
$$I=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}$$
$$\cdot\frac{\Gamma(p_n)\cdot\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+p_n)}$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)},$$

因此，对任何自然数，公式均成立.

【4218】　把展布于域 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2$ 的 $n(n\geqslant 2)$ 重积分化解为单积分：

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

其中 $f(u)$ 为连续函数.

解　作变量代换

$$x_1=r\cos\varphi_1,$$
$$x_2=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$
$$\cdots$$
$$x_{n-1}=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},$$
$$x_n=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1},$$

则　$I=r^{n-1}\sin^{n-2}\sin^{n-2}\cdots\sin\varphi_{n-2}$,

积分域变为

$$0\leqslant r\leqslant R,0\leqslant\varphi_1\leqslant\pi,0\leqslant\varphi_2\leqslant\pi,$$
$$\cdots,0\leqslant\varphi_{n-2}\leqslant\pi,0\leqslant\varphi_{n-1}\leqslant 2\pi,$$

所以　$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$

$$=\int_0^R r^{n-1}f(r)\int_0^\pi\sin^{n-2}\varphi_1\int_0^\pi sin^{n-3}\varphi_2 d\varphi_2\cdots\int_0^\pi sin\varphi_{n-2}d\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}d\varphi_{n-1}$$

$$=2\pi\int_0^R r^{n-1}f(r)\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{n-2}\varphi_1\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-3}\varphi_2\mathrm{d}\varphi_2\cdots 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi_{n-2}\mathrm{d}\varphi_{n-2}$$

$$=2\pi\cdot B\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot B\left(\frac{n-2}{2},\frac{1}{2}\right)\cdots$$

$$B\left(\frac{2}{2},\frac{1}{2}\right)\int_0^R r^{n-1}f(r)\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdots$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\int_0^R r^{n-1}f(r)\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \cdot \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^R r^{n-1}f(r)\mathrm{d}r = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^R r^{n-1}f(r)\mathrm{d}r.$$

【4219】 计算半径 R,密度为 ρ_0 的均质球的位势,即求积分:

$$u = \frac{\rho_0^2}{2}\underset{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2\\x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}}{\iiiiiint}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_2\mathrm{d}z_2}{r_{1,2}},$$

其中 $\qquad r_{1,2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$

解 $\quad u = \frac{\rho_0}{2}\underset{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2}{\iiint}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z_1\underset{x_2^2+y_2^2+z^2\leqslant R^2}{\iiint}\frac{\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_2\mathrm{d}z_2}{r_{1,2}}.$

利用 4155 题的结果知

$$\underset{x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}{\iiint}\frac{\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_2\mathrm{d}z_2}{r_{1,2}} = 2\pi R^2 - \frac{2\pi}{3}r_1^2,$$

其中 $\qquad r = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.$

因此,利用球坐标可得

$$u = \frac{\rho_0^2}{2}\underset{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2}{\iiint}\left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}r_1^2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z_1$$

$$= \frac{\rho_0^2}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_0^R\left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}r^2\right)r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{16}{15}\pi^2\rho_0^2R^5.$$

【4220】 若 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ (a_{ij}=a_{ji})$ 为正定形,计算 n 重积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i+c\right\}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

解 作变量代换

$$x_i = y_i + \alpha_i \qquad (i=1,2,\cdots,n), \tag{①}$$

其中 $\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为待定常数,于是有

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i + c$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j + 2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j\right) + b_i\right] y_i$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i + c.$$

由于 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ 是正定形，故必有 $\delta = |a_{ij}| > 0$，从而线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j + b_i = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n), \tag{②}$$

有唯一的一组解 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，取变换 ① 式中的 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为方程组 ② 的解，于是

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j + \mathrm{d},$$

其中
$$\mathrm{d} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j\right)\alpha_i + 2\sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i + c$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i + 2\sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i + c = \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i + c.$$

令

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & c \end{vmatrix},$$

即 Δ 为 $n+1$ 阶行列式，将此行列式的第一列乘以 α_1，第二列乘以 α_2，…，第 n 列乘以 α_n 加到第 $n+1$ 列，则得

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}\alpha_j + b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}\alpha_j + b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & \sum\limits_{j=1}^{n} b_j\alpha_j + c \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ b_1 & \cdots & b_n & \mathrm{d} \end{vmatrix} = \mathrm{d}\delta,$$

所以 $\quad \mathrm{d} = \dfrac{\Delta}{\delta}.$

由于 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j$ 为正定二次型，故存在正交矩阵

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

使得 $\quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$

其中 $\quad \lambda_i > 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

即作线性变换

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} z_j \qquad (i = 1,2,\cdots,n),$$

则有 $\quad \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2,$

$$\delta = |A| = |T||T^{-1}| \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

并且 $\quad \dfrac{D(x_1,\cdots x_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)} = 1,$

$$\frac{D(y_1 \cdots y_n)}{D(z_1 \cdots z_n)} = |T| = \pm 1.$$

故 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i + c\right)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_i y_j + d\right)} dy_1 dy_2 \cdots dy_n$$

$$= e^{-d}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i z_i^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 z_1^2} dz_1\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_2 z_2^2} dz_2\right)\cdots\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_n z_n^2} dz_n\right),$$

而 $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_i z_i^2} dz_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

因此 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i + c\right)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= e^{-\frac{\Delta}{\delta}} \cdot \prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} = e^{-\frac{\Delta}{\delta}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}} e^{-\frac{\Delta}{\delta}}.$$

§11. 曲线积分

1. **第一类曲线积分** 若函数 $f(x,y,z)$ 在平滑曲线 C 和

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant T), \qquad ①$$

的各点上有定义且是连续的，ds 为弧的微分，则

$$\int_C f(x,y,z)ds$$

$$= \int_{t_0}^{T} f(x(t),y(t),z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt.$$

这个积分的特点在于它与曲线 C 的方向无关.

2. **第一类曲线积分在力学上的应用** 若 $\rho = \rho(x,y,z)$ 为在曲线 C 上动点的线性密度，则曲线 C 的质量等于：

$$M = \int_C \rho(x,y,z)ds.$$

这条曲线的重心坐标 (x_0, y_0, z_0) 用下式表示：

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_C x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,$$

$$y_0 = \frac{1}{M}\int_C y\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\int_C z\rho(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

3. **第二类曲线积分**　若函数 $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$ 在曲线 ① 各点上是连续的朝着参数 t 递增方向，为曲线方向，则

$$\begin{aligned}&\int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z\\&= \int_{t_0}^{T}(P(x(t),y(t),z(t))x'(t)\\&\quad + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)\\&\quad + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))\mathrm{d}t.\end{aligned} \qquad ②$$

当曲线 C 环绕方向改变时这个积分的符号也变反. 在力学上，积分 ② 是其作用点描述出曲线 C 时. 变力 (P,Q,R) 的功.

4. **全微分情况**　若：

$$P(x,y,z)\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z = \mathrm{d}u,$$

其中 $u = u(x,y,z)$ 为在域 V 的单值函数，则与完全位于域 V 内的曲线形状无关，而有：

$$\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = u(x_2,y_2,z_2) - u(x_1,y_1,z_1),$$

其中 (x_1,y_1,z_1) 为路径的起点和 (x_2,y_2,z_2) 为终点. 简而言之，若域 V 是单联通域，函数 P, Q 和 R 拥有连续一阶偏导数，对此的充要条件是在域 V 内恒满足以下条件：

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

这时，在标准的平行六面体域 V 的简单情况下，我们可以按照下式求得函数：

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)\mathrm{d}y$$
$$+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)\mathrm{d}z+c,$$

其中 (x_0,y_0,z_0) 为域 V 的某个固定点及 c 为常数.

力学上这种情况相当于具有势的力的功.

计算下列第一类曲线积分(4221 ~ 4230).

【4221】 $\int_C(x+y)\mathrm{d}s$,其中 C 为以 $O(0,0)$,$A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ 为顶点的三角形周线.

解 $\int_C(x+y)\mathrm{d}s$

$$=\int_{OA}(x+y)\mathrm{d}s+\int_{AB}(x+y)\mathrm{d}s+\int_{BO}(x+y)\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_0^1\sqrt{2}\mathrm{d}x+\int_0^1 y\mathrm{d}y=1+\sqrt{2}.$$

【4222】 $\int_C y^2\mathrm{d}s$,其中 C 为摆线 $x=a(t-\sin t)$,$y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一拱.

解 $\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$

$$=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t$$
$$=2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t,$$

所以 $\int_C y^2\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$

$$=8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}\mathrm{d}t=16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 u\mathrm{d}u$$
$$=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u\mathrm{d}u=\frac{256}{15}a^3.$$

【4223】 $\int_C(x^2+y^2)\mathrm{d}s$,其中 C 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$,$y=a(\sin t-t\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解 $ds=\sqrt{a^2t^2\cos^2t+a^2t^2\sin^2t}dt=at\,dt$,

所以 $\int_c(x^2+y^2)ds$

$$=\int_0^{2\pi}[a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2]at\,dt$$

$$=a^3\int_0^{2\pi}t(1+t^2)dt=a^3(2\pi^2+4\pi^4).$$

【4224】 $\int\limits_C xy\,ds$,其中C为双曲线$x=a\text{ch}t,y=a\text{sh}t(0\leqslant t\leqslant t_0)$的弧.

解 $ds=\sqrt{a^2\text{sh}^2t+a^2\text{ch}^2t}dt=a\sqrt{\text{ch}2t}dt$,

所以 $\int_c xy\,ds=a^3\int_0^{t_0}\text{ch}t\,\text{sh}t\sqrt{\text{ch}2t}dt=\frac{a^3}{2}\int_0^{t_0}\text{sh}2t\sqrt{\text{ch}2t}dt$

$$=\frac{a^3}{6}(\sqrt{\text{ch}^3 2t_0}-1).$$

【4225】 $\int\limits_C(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$,其中$C$为星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$的弧.

解 $ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx$,

所以 $\int_c(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds=4\int_0^a[x^{\frac{4}{3}}+(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^2]\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx$

$$=4a^{\frac{1}{3}}\int_0^a(2x+a^{\frac{4}{3}}x^{-\frac{1}{3}}-2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}})dx=4a^{\frac{7}{3}}.$$

【4226】 $\int\limits_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$,其中$C$为由曲线$r=a,\varphi=0,\varphi=\frac{\pi}{4}$确定的凸周线($r$和$\varphi$为极坐标).

解 凸围线由三段组成,它们分别是:

直线段$c_1:\varphi=0(0\leqslant r\leqslant a)$,

圆弧段$c_2:r=a\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$,

直线段$c_3:\varphi=\frac{\pi}{2}(0\leqslant r\leqslant a)$,

相应的弧度的微分为：

$$ds = dr, ds = \sqrt{r^2 + r'^2_\varphi}d\varphi = a d\varphi;$$

$$ds = dr,$$

因此 $$\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds = \int_{c_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds + \int_{c_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds + \int_{c_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$$

$$= \int_0^a e^r dr + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a\, d\varphi + \int_0^a e^r dr$$

$$= 2(e^a - 1) + \frac{\pi a e^a}{4}.$$

【4227】 $\int_C |y|ds$，其中 C 为双纽线 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ 的弧.

解 双纽线的极坐标方程为

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi.$$

故 $$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi,$$

所以 $$\int_C |y|ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi$$

$$= 4a^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2(2-\sqrt{2}).$$

【4228】 $\int_C x\,ds$，其中 C 为位于 $r \leqslant a$ 弧内的对数螺线部分 $r = ae^{k\varphi}(k>0)$.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi = ae^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}d\varphi \quad (-\infty < \varphi \leqslant 0),$$

所以 $$\int_C x\,ds = \int_{-\infty}^0 ae^{k\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot ae^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}d\varphi$$

$$= a^2\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2k\cos\varphi + \sin\varphi}{1+4k^2}e^{2k\varphi}\Big|_{-\infty}^0$$

$$= \frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}.$$

【4229】 $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$,其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ax$.

解 对于上半圆周

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+\left(\frac{a-2x}{2y}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2y}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}\mathrm{d}x \qquad (0 \leqslant x \leqslant a),$$

所以 $$\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s = 2\int_0^a \sqrt{ax}\cdot\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= a\sqrt{a}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a-x}} = 2a^2.$$

【4230】 $\int\limits_C \frac{\mathrm{d}s}{y^2}$,其中 C 为悬链线 $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

解 $$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \operatorname{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x,$$

所以 $$\int_C \frac{\mathrm{d}s}{y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}{a^2\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(\operatorname{sh}\frac{x}{a}\right)}{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\left(\operatorname{sh}\frac{x}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a}.$$

求空间曲线的弧长(参数是正数)(4231 ~ 4236).

【4231】 $x=3t, y=3t^2, z=2t^3$,从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$

解 $\mathrm{d}s = \sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,\mathrm{d}t = 3(2t^2+1)\mathrm{d}t$,

所以,弧长为

$$s = \int_0^1 3(2t^2+1)\mathrm{d}t = 5.$$

【4232】 当 $0<t<+\infty$ 时,$x=\mathrm{e}^{-t}\cos t, y=\mathrm{e}^{-t}\sin t, z=\mathrm{e}^{-t}$.

解 弧长的微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}(\sin t+\cos t)^2+\mathrm{e}^{-2t}(\cos t-\sin t)^2+\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t$$
$$=\sqrt{3}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,$$

所以,弧长为

$$s=\int_0^{+\infty}\sqrt{3}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\sqrt{3}.$$

【4233】 $y=a\arcsin\dfrac{x}{a},z=\dfrac{a}{4}\ln\dfrac{a-x}{a+x}$,从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$.

解 $$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2-x^2}+\frac{a^4}{4(a^2-x^2)^2}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}\mathrm{d}x\qquad(|x_0|<a),$$

所以当 $x_0\geqslant 0$ 时,

$$s=\int_0^{x_0}\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{x_0}\mathrm{d}x+\int_0^{x_0}\frac{a^2}{2(a^2-x^2)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}+x_0=|z_0|+|x_0|.$$

当 $x_0<0$ 时,

$$s=\int_{x_0}^{0}\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}\mathrm{d}x=-\frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}-x_0$$
$$=|z_0|+|x_0|.$$

总之 $\quad s=|z_0|+|x_0|.$

【4234】 $(x-y)^2=a(x+y),x^2-y^2=\dfrac{9}{8}z^2$,从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$.

解 令 $u=x-y,v=x+y,z=z$,则曲线方程变为

$$u^2=av,uv=\frac{9}{8}z^2.$$

解之得 $$u=\sqrt[3]{\frac{9a}{8}}\cdot\sqrt[3]{z^2},\quad v=\frac{1}{a}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2}\sqrt[3]{z^4},$$

从而 $$x=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2}\sqrt[3]{z^4}+\sqrt[3]{\frac{9a}{8}}\cdot\sqrt[3]{z^2}\right],$$

$$y=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2}\sqrt[3]{z^4}-\sqrt[3]{\frac{9a}{8}}\cdot\sqrt[3]{z^2}\right],$$

所以 $$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2+1}$$

$$=\sqrt{\frac{8}{9a^2}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^4}\sqrt[3]{z^2}+\frac{2}{9}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{z^{-2}}+1}\,\mathrm{d}z$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}\cdot\sqrt[3]{z^2}+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}\sqrt[3]{z^{-2}}+1}\,\mathrm{d}z.$$

故弧长为

$$s=\int_0^{z_0}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}\sqrt[3]{z^2}+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}\sqrt[3]{z^{-2}}+1}\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}t+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}\cdot\frac{1}{t}+1}\cdot\frac{3\sqrt{t}}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}t^2+t+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{a}}t+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{3}}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}}+2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}}\right).$$

【4235】 $x^2+y^2=cz,\ \frac{y}{x}=\tan\frac{z}{c}$,从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$.

解 取曲线的参数方程

$$x=\sqrt{cz}\cos\frac{z}{c},\quad y=\sqrt{cz}\sin\frac{z}{c},\quad z=z.$$

则 $$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}\cos\frac{z}{c}-\sqrt{\frac{z}{c}}\sin\frac{z}{c}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}\sin\frac{z}{c}+\sqrt{\frac{z}{c}}\cos\frac{z}{c}\right)^2+1}\,\mathrm{d}z$$

$$= \sqrt{\frac{c}{4z} + \frac{z}{c} + 1}\mathrm{d}z = \frac{2z+c}{\sqrt{4cz}}\mathrm{d}z,$$

所以,弧长为

$$s = \int_0^{z_0} \frac{2z+c}{\sqrt{4cz}}\mathrm{d}z = \int_0^{z_0} \sqrt{\frac{z}{c}}\mathrm{d}z + \int_0^{z_0} \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}\mathrm{d}z$$

$$= \sqrt{cz_0}\left(1 + \frac{2z_0}{3c}\right).$$

【4236】 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{ch}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = a$ 从 $A(a,0,0)$ 点到 $B(x,y,z)$ 点

解 令

$$x = \sqrt{a^2 - z^2}\cos\varphi, y = \sqrt{a^2 - z^2}\sin\varphi,$$

不妨设 $z > 0$,则

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

$$z = \sqrt{a^2 - (x^2+y^2)} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{\mathrm{ch}^2\varphi}} = a\,\mathrm{th}\varphi,$$

而 $$\sqrt{a^2 - z^2} = \sqrt{a^2(1-\mathrm{th}^2\varphi)} = \frac{a}{\mathrm{ch}\varphi},$$

故曲线的参数方程为

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\mathrm{ch}\varphi}, y = \frac{a\sin\varphi}{\mathrm{ch}\varphi}, z = a\,\mathrm{th}\varphi,$$

从而 $$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$= a\sqrt{\frac{(\sin\varphi\mathrm{ch}\varphi + \cos\varphi\mathrm{sh}\varphi)^2}{\mathrm{ch}^4\varphi} + \frac{(\cos\varphi\mathrm{ch}\varphi - \sin\varphi\mathrm{sh}\varphi)^2}{\mathrm{ch}^4\varphi} + \frac{1}{\mathrm{ch}^4\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

$$= a\sqrt{\frac{\mathrm{ch}^2\varphi + \mathrm{sh}^2\varphi + 1}{\mathrm{ch}^4\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \sqrt{2}a\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{ch}\varphi}.$$

所以,弧长为

$$s=\int_0^{\varphi}\sqrt{2}a\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{ch}\varphi}=\sqrt{2}a\int_0^{\varphi}\frac{2}{\mathrm{e}^{\varphi}+\mathrm{e}^{-\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\sqrt{2}a\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\varphi})}{1+(\mathrm{e}^{\varphi})^2}=2\sqrt{2}a\arctan\mathrm{e}^{\varphi}\Big|_0^{\varphi}$$

$$=2\sqrt{2}a\left(\arctan\mathrm{e}^{\varphi}-\frac{\pi}{4}\right),$$

由 $z=a\mathrm{th}\varphi$,

即 $z(\mathrm{e}^{2\varphi}+1)=a(\mathrm{e}^{2\varphi}-1)$.

从而 $\mathrm{e}^{2\varphi}=\dfrac{a+z}{a-z}$,

$$\mathrm{e}^{\varphi}=\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

故 $s=2\sqrt{2}a\left(\arctan\dfrac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

但由于 $\tan\left(\arctan\dfrac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{a-\sqrt{a^2-z^2}}{z}\tan\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right)$$

$$=\frac{a-\sqrt{a^2-z^2}}{z}.$$

故在主值范围内

$$\arctan\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}},$$

因此 $s=\sqrt{2}a\arctan\dfrac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}$.

若 $z<0$,则可推得弧长为

$$s=\sqrt{2}a\arctan\frac{-z}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

计算沿空间曲线所取得的第一类曲线积分(4237 ~ 4240).

【4237】 $\int_C(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$,其中 C 为螺旋线 $x=a\cos t$,

$y = a\sin t, z = bt(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的一段.

解 $ds = \sqrt{a^2+b^2}dt$

所以 $$\int_c (x^2+y^2+z^2)ds = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)dt$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(2\pi a^2 + \frac{8\pi^3}{3}b^2\right).$$

【4238】 $\int_C x^2 ds$,其中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$.

解 由对称性知

$$\int_c x^2 ds = \int_c y^2 ds = \int_c z^2 ds,$$

所以 $$\int_c x^2 ds = \frac{1}{3}\int_c (x^2+y^2+z^2)ds$$

$$= \frac{a^2}{3}\int_c ds = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

【4239】 $\int_C z ds$,其中 C 为圆锥螺旋线 $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t(0 \leqslant t \leqslant t_0)$.

解 $ds = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}dt$

$$= \sqrt{2+t^2}dt,$$

所以 $$\int_c z ds = \int_0^{t_0} t\sqrt{2+t^2}dt = \frac{1}{3}[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}].$$

【4240】 $\int_C z ds$,其中 C 为曲线 $x^2+y^2=z^2, y^2=ax$ 从点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(a,a,a\sqrt{2})$ 的弧.

解 由曲线方程可得

$$z = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{y^4}{a^2}+y^2} = \frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}.$$

从而曲线的参数方可取为

$$x = \frac{y^2}{a}, y = y, z = \frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2},$$

所以 $$ds=\sqrt{\left(\frac{2y}{a}\right)^2+1+\left(\frac{2y^2+a^2}{a\sqrt{y^2+a^2}}\right)^2}\,dy$$

$$=\sqrt{\frac{8y^4+9a^2y^2+2a^4}{a^2(y^2+a^2)}}\,dy,$$

故 $$\int_c z\,ds=\int_0^a\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}\sqrt{\frac{8y^4+9a^2y^2+2a^4}{a^2(y^2+a^2)}}\,dy$$

$$=\frac{\sqrt{8}}{a^2}\int_0^a y\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\,dy$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\int_0^a\sqrt{\left(y^2+\frac{9a^2}{16}\right)^2-\frac{17a^4}{16^2}}\,d\left(y^2+\frac{9a^2}{16}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\left[\frac{y^2+\frac{9a^2}{16}}{2}\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\right.$$

$$\left.-\frac{17a^4}{2\cdot16^2}\ln\left(y^2+\frac{9a^2}{16}+\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\right)\right]\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\left[\frac{25a^4}{64}\sqrt{\frac{19}{2}}-\frac{17a^4}{2\cdot16^2}\ln\frac{25a^2+8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2}{16}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{9a^4}{64}-\frac{17a^4}{2\cdot16^2}\ln\frac{17a^2}{16}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\,\frac{25a^4\sqrt{38}-18a^4}{128}+\frac{\sqrt{2}}{a^2}\cdot$$

$$\frac{17a^4}{2\cdot16^2}\ln\frac{\frac{17a^2}{16}}{\frac{25a^2+8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2}{16}}$$

$$=\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left[100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right].$$

【4241】 若曲线在(x,y)点的线密度等于$\rho=|y|$,求曲线$x=a\cos t, y=b\sin t(a\geqslant b>0;0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的质量.

解 $ds=\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\,dt=a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2t}\,dt,$

其中 $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$,

所以,若 $\varepsilon>0$,则

$$\begin{aligned}m&=\int_c\rho\mathrm{d}s=\int_c|y|\mathrm{d}s\\&=\int_0^\pi ab\sin t\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\mathrm{d}t+\\&\quad\int_\pi^{2\pi}a(-b\sin t)\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\mathrm{d}t\\&=-ab\int_0^\pi\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\mathrm{d}(\cos t)\\&\quad+ab\int_\pi^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\mathrm{d}(\cos t)\\&=ab\int_{-1}^1\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\mathrm{d}u+ab\int_{-1}^1\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\mathrm{d}u\\&=4ab\int_0^1\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\mathrm{d}u\\&=\frac{4ab}{\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon u}{2}\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}+\frac{1}{2}\arcsin(\varepsilon u)\right]\Big|_0^1\\&=2b^2+2ab\,\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

若 $\varepsilon=0$,即 $a=b$,则

$$\mathrm{d}s=a\mathrm{d}t,$$

所以 $$m=\int_0^\pi a^2\sin t\mathrm{d}t+\int_\pi^{2\pi}(-a\sin t)a\mathrm{d}t=4a^2.$$

【4241.1】 若抛物线在点 $M(x,y)$ 的线密度等于 $|y|$,求抛物线 $y^2=2px\quad(0\leqslant x\leqslant\frac{p}{2})$ 弧的质量.

解 $$\mathrm{d}s=\sqrt{1+x'^2_y}\mathrm{d}y=\sqrt{1+\left(\frac{y}{p}\right)^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{y^2+p^2}}{p}\mathrm{d}y,$$

所以 $$m=\int_c\rho\mathrm{d}s=\int_{-p}^p|y|\frac{\sqrt{y^2+p^2}}{p}\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^p y \frac{\sqrt{y^2+p^2}}{p}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^p \sqrt{y^2+p^2}\,\mathrm{d}(y^2+p^2)$$

$$= \frac{1}{p}\cdot\frac{2}{3}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^p$$

$$= \frac{2p^2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

【4242】 求曲线

$$x = at, y = \frac{a}{2}t^2, z = \frac{a}{3}t^2 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

弧的质量,它的密度按照 $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}}$ 规律变化.

解 $\mathrm{d}s = \sqrt{a^2 + a^2t^2 + a^2t^4}\,\mathrm{d}t = a\sqrt{1+t^2+t^4}\,\mathrm{d}t$,

而密度 $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}} = t$,

所以,质量为

$$m = \int_c \rho \mathrm{d}s = a\int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^1 \sqrt{1+u+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{a}{2}\left[\frac{u+\frac{1}{2}}{2}\sqrt{1+u+u^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)\right]\Big|_0^1$$

$$= \frac{a}{8}\left[(3\sqrt{3}-1)+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right].$$

【4243】 计算均质曲线 $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 从 $A(0,a)$ 点到 $B(b,h)$ 点的弧的重心坐标.

解 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x.$

因为 $h = a\operatorname{ch}\dfrac{b}{a}$，

所以 $\operatorname{ch}\dfrac{b}{a} = \dfrac{h}{a}$.

从而 $\operatorname{sh}\dfrac{b}{a} = \sqrt{\operatorname{ch}^2\dfrac{b}{a} - 1} = \dfrac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a}$，

质量为 $m = \rho_0\displaystyle\int_0^b \operatorname{ch}\dfrac{x}{a}\mathrm{d}x = a\rho_0\operatorname{sh}\dfrac{b}{a} = \rho_0\sqrt{h^2 - a^2}$.

故重心坐标为

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{\rho_0}{m}\int_0^b x\operatorname{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\rho_0}{m}\left[ab\operatorname{sh}\frac{b}{a} - a^2\left(\operatorname{ch}\frac{b}{a} - 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{h^2 - a^2}}\left[b\sqrt{h^2 - a^2} - a^2\left(\frac{h}{a} - 1\right)\right] \\
&= b - a\sqrt{\frac{h - a}{h + a}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_0 &= \frac{\rho_0}{m}\int_0^b y\operatorname{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{a\rho_0}{m}\int_0^b \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\mathrm{d}x \\
&= \frac{a\rho_0}{m}\int_0^b \frac{1 + \operatorname{ch}\frac{2x}{a}}{2}\mathrm{d}x = \frac{a\rho_0}{m}\left[\frac{x}{2} + \frac{a}{4}\operatorname{sh}\frac{2x}{a}\right]\Bigg|_0^b \\
&= \frac{a\rho_0}{m}\left(\frac{b}{2} + \frac{a}{4}\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right) \\
&= \frac{a}{\sqrt{h^2 - a^2}}\left(\frac{b}{2} + \frac{h}{2}\,\frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a}\right) \\
&= \frac{h}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{h^2 - a^2}}.
\end{aligned}$$

【4244】 确定摆线

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi),$$

的弧的重心.

解 $\mathrm{d}s = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$

$$= 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t,$$

质量为 $m = \int_c \rho_0 \mathrm{d}s = 2a\rho_0\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = 4a\rho_0$,

所以,重心坐标为

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_0^{\pi}\rho_0 a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a}{2}\left(\int_0^{\pi} t\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t - \int_0^{\pi}\sin t\cdot\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{a}{2}\left[-2t\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}t\right.$$

$$\left.-4\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\mathrm{d}\left(\sin\frac{t}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{a}{2}\left[4\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{4a}{3},$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\int_0^{\pi}\rho_0 a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t - \frac{9}{4}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{4a}{3}.$$

【4244.1】 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$ 的弧 C 对坐标轴的静态力矩:

$$S_y = \int_C x\mathrm{d}s, S_x = \int_C y\mathrm{d}s.$$

解 内摆线的参数方程为

$$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t \qquad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

则 $$\mathrm{d}s = \sqrt{9a^2\cos^4\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$= 3a\cos t\sin t\mathrm{d}t.$$

所以 $$S_y = \int_c x\mathrm{d}s = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin t\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{5},$$

$$S_x = \int_c y\mathrm{d}s = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{5}.$$

【4244.2】 求圆周 $x^2+y^2=a^2$ 对其直径的转动惯量.

解 由对称性知,对直径的转动惯量,即为对 Ox 轴的转动惯量,利用圆的参数方程

$$x=a\cos t, y=a\sin t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

则 $\qquad ds=adt,$

所以,所求转动惯量为

$$I_x=\int_c y^2 dS=\int_0^{2\pi} a^3\sin^2 t dt$$

$$=a^3\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=a^3\pi.$$

【4244.3】 求以下曲线对 $O(0,0)$ 点的转功惯量:

$$I_0=\int_C (x^2+y^2)ds.$$

(1) 正方形 $\{|x|,|y|\}=a$ 的最大周线 C;

(2) 在极坐标中以下述三点为顶点的正三角形的周线 C:

$$P(a,0),Q\left(a,\frac{2\pi}{3}\right),R\left(a,\frac{4\pi}{3}\right).$$

解 (1) 由对称性知

$$I_0=4\int_{-a}^{a}(a^2+x^2)dx=\left(4a^2x+\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{32}{3}a^3.$$

(2) 点 P,Q,R 的直角坐标为 $P(a,0),Q\left(-\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, $R\left(-\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$,从而三角形三条边的方程为

$$PQ: y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-a) \qquad \left(-\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant a\right),$$

$$PR: y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-a) \qquad \left(-\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant a\right),$$

$$QR: x=-\frac{a}{2} \qquad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\leqslant y\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}a\right),$$

它们弧长的微分分别为

$$PQ: \mathrm{d}s = \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x,$$

$$PR: \mathrm{d}s = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x,$$

$$QR: \mathrm{d}s = \mathrm{d}y,$$

因此
$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_c (x^2+y^2)\mathrm{d}s \\
&= \int_{PQ}(x^2+y^2)\mathrm{d}s + \int_{PR}(x^2+y^2)\mathrm{d}s + \int_{QR}(x^2+y^2)\mathrm{d}s \\
&= 2\int_{-\frac{a}{2}}^{a}\left[x^2+\frac{1}{3}(x-a)^2\right]\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{9}(x-a)^3\right]\Bigg|_{-\frac{a}{2}}^{a} + \left(\frac{a^2}{4}y+\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \\
&= \sqrt{3}a^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^3.
\end{aligned}$$

【4244.4】 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的平均极半径，亦即数 $r_0(r_0>0)$，可用下式确定：

$$I_0 = s\cdot r_0^2,$$

其中 I_0 为星形线对坐标原点的轻功惯量(见第 4244.3 题)，s 为星形线的弧长.

解 内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的参数方程为

$$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

弧长的微分

$$\mathrm{d}s = 3a\,|\cos t\sin t|,$$

由对称性有

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\cos t\sin t\,\mathrm{d}t = 6a,$$

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_c (x^2+y^2)\mathrm{d}s \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a^3(\cos^6 t+\sin^6 t)\cos t\sin t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= 12a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^7 t\sin t + \sin^7 t\cos t)\mathrm{d}t = 3a^3,$$

所以，平均极半径为

$$r_0 = \sqrt{\frac{I_0}{s}} = \sqrt{\frac{3a^3}{6a}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

【4245】 计算球面三角形 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$；$x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$ 周线重心的坐标.

解 利用球坐标

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, y = r\sin\varphi\cos\psi, z = r\sin\psi.$$

球面上的三角形三条曲边的方程分别是

$$x = a\cos\varphi, y = a\sin\varphi, z = 0, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$x = a\cos\psi, y = 0, z = a\sin\psi, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$x = 0, y = a\cos\psi, z = a\sin\psi, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2};$$

又围线的周长

$$s = 3 \cdot \frac{\pi a}{2} = \frac{3\pi a}{2},$$

于是，重心坐标为

$$x_0 = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\varphi \cdot a\mathrm{d}\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\psi \cdot a\mathrm{d}\psi}{\frac{3\pi a}{2}} = \frac{2a^2}{\frac{3\pi a}{2}} = \frac{4a}{3\pi},$$

由对称性知

$$x_0 = y_0 = z_0 = \frac{4a}{3\pi}.$$

【4246】 求均质弧

$$x = e^t\cos t, y = e^t\sin t, z = e^t \qquad (-\infty < t \leqslant 0),$$

的重心坐标.

解 $\mathrm{d}s$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{3}e^t dt,$$

质量为 $m=\int_{-\infty}^{0}\sqrt{3}e^t dt=\sqrt{3}$ （设密度 $\rho=1$），

所以，重心坐标为

$$x_0=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{0}e^t\cos t\cdot\sqrt{3}e^t dt=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}\cos t dt$$

$$=\frac{2\cos t+\sin t}{2^2+1^2}e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{2}{5},$$

$$y_0=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{0}e^t\sin t\cdot\sqrt{3}e^t dt=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}\sin t dt$$

$$=\frac{2\sin t-\cos t}{2^2+1^2}e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0}=-\frac{1}{5},$$

$$z_0=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{0}e^t\cdot\sqrt{3}e^t dt=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}dt=\frac{1}{2}.$$

【4247】 求螺旋线

$$x=a\cos t,y=a\sin t,z=\frac{h}{2\pi}t\qquad(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

的一个线匝对坐标轴的转动惯量.

解 $$ds=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+\frac{h^2}{4\pi^2}}dt$$

$$=\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt.$$

所以，转动惯量

$$I_x=\int_c(y^2+z^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^2 t+\frac{h^2}{4\pi^2}t^2\right)\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt$$

$$=\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}a^2\pi+\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}\cdot\frac{1}{3}(2\pi)^3$$

$$=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2},$$

$$I_y=\int_c(x^2+z^2)ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(a^2\cos^2 t + \frac{h^2}{4}t^2\right)\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}\mathrm{d}t$$

$$= \left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2},$$

$$I_z = \int_c (x^2+y^2)\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a^2 \cdot \frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}\mathrm{d}t$$

$$= a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

【4248】 计算第二型曲线积分：$\int_{OA} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$，

其中 O 为坐标原点，点 A 的坐标是(1,2). 若：a)OA 为直线段；b)OA 为轴是 Oy 的抛物线；c)OA 为由 Ox 轴上的线段 OB 和平行于 Oy 轴的线段 BA 组成的折线.

解 (1) 直线段 OA 的方程为

$$y = 2x \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

所以 $\int_{OA} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x-2x)\mathrm{d}x = 0.$

(2) 抛物线段 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程为

$$y = 2x^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

所以 $\int_{OA} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \int_0^1 (4x^2-2x^2)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$

(3) 直线段 OB 的方程为

$$y = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

BA 的方程为

$$x = 1 \qquad (0 \leqslant y \leqslant 2),$$

所以 $\int_{OA} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \int_{OB} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + \int_{BA} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$

$$= 0 + \int_0^2 \mathrm{d}y = 2.$$

【4249】 对于上题中所指出的路径 a)，b) 和 c)，计算 $\int_{OA} x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_{OA} x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x + 2x)\mathrm{d}x = 2.$

(2) $\int_{OA} x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = \int_0^1 (4x^2 + 2x^2)\mathrm{d}x = 2.$

(3) $\int_{OA} x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = \int_{OB} x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x + \int_{BA} x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x$

$$= 0 + \int_0^2 \mathrm{d}y = 2.$$

在参数递增方向沿着下述曲线计算下列第二类曲线积分(4250 ~ 4257).

【4250】 $\int_C (x^2 - 2xy)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y$,其中 C 为 $y = x^2$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ 抛物线.

解 因为 $y = x^2$,

所以 $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$,

故 $\int_C (x^2 - 2xy)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y$

$$= \int_{-1}^1 [(x^2 - 2x^3) + 2x(x^4 - 2x^3)]\mathrm{d}x = -\frac{14}{15}.$$

【4251】 $\int_C (x^2 + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\mathrm{d}y$,其中 C 为 $y = 1 - |1 - x|$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$ 曲线.

解 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,

$$y = 1 - (1 - x) = x.$$

从而 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$.

当 $1 \leqslant x \leqslant 2$ 时,

$$y = 1 - (x - 1) = 2 - x.$$

从而 $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$,

所以 $\int_C (x^2 + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\mathrm{d}y$

$$= \int_0^1 2x^2\mathrm{d}x + \int_1^2 2(2 - x)^2\mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$$

【4252】 $\oint_C (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$，其中 C 为逆时针方向的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 利用椭圆的参数方程

$$x=a\cos t, y=b\sin t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

所以
$$\begin{aligned}&\oint_C (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}[(a\cos t+b\sin t)(-a\sin t)+(a\cos t-b\sin t)b\cos t]\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\left(ab\cos 2t-\frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t\right)\mathrm{d}t=0.\end{aligned}$$

【4253】 $\int_C (2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，其中 C 为摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一拱.

解 $\mathrm{d}x=a(1-\cos t)\mathrm{d}t$,

$\mathrm{d}y=a\sin t\mathrm{d}t$,

所以
$$\begin{aligned}&\int_C (2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\{[2a-a(1-\cos t)]a(1-\cos t)+a(t-\sin t)a\sin t\}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}a^2t\sin t\mathrm{d}t=-a^2(t\cos t-\sin t)\Big|_0^{2\pi}=-2\pi a^2.\end{aligned}$$

【4254】 $\oint_C \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 C 为逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=a^2$.

解 利用圆的参数方程

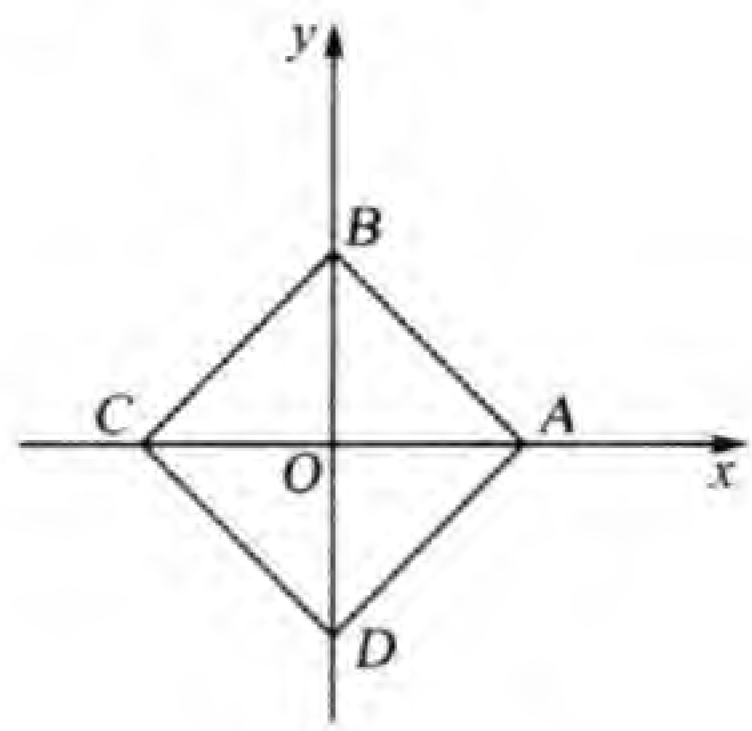
$$x=a\cos t, y=a\sin t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

所以
$$\begin{aligned}&\oint_C \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos t+a\sin t)(-a\sin t)-(a\cos t-a\sin t)a\cos t}{a^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=-2\pi.$$

【4255】 $\oint\limits_{ABCDA}\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$，其中 $ABCDA$ 为以 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,0)$，$D(0,-1)$ 为顶点的正方形周线.

解 正方形各边的方程分别为



4255 题图

$$AB: y=1-x.$$
$$BC: y=1+x,$$
$$CD: y=-1-x,$$
$$DA: y=-1+x,$$

所以 $\displaystyle\oint_c=\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$

$$=\int_{AB}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x+y}+\int_{BC}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{-x+y}+\int_{CD}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{-x-y}$$
$$+\int_{DA}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x-y}$$
$$=\int_1^0(1-1)\mathrm{d}x+\int_0^{-1}2\mathrm{d}x+\int_{-1}^0(1-1)\mathrm{d}x+\int_0^1 2\mathrm{d}x$$
$$=0.$$

【4256】 $\int\limits_{AB}\sin y\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y$，其中 AB 为点 $A(0,\pi)$ 和点 $B(\pi,0)$ 之间的直线段.

解 AB 的方程为

$$y=\pi-x.$$

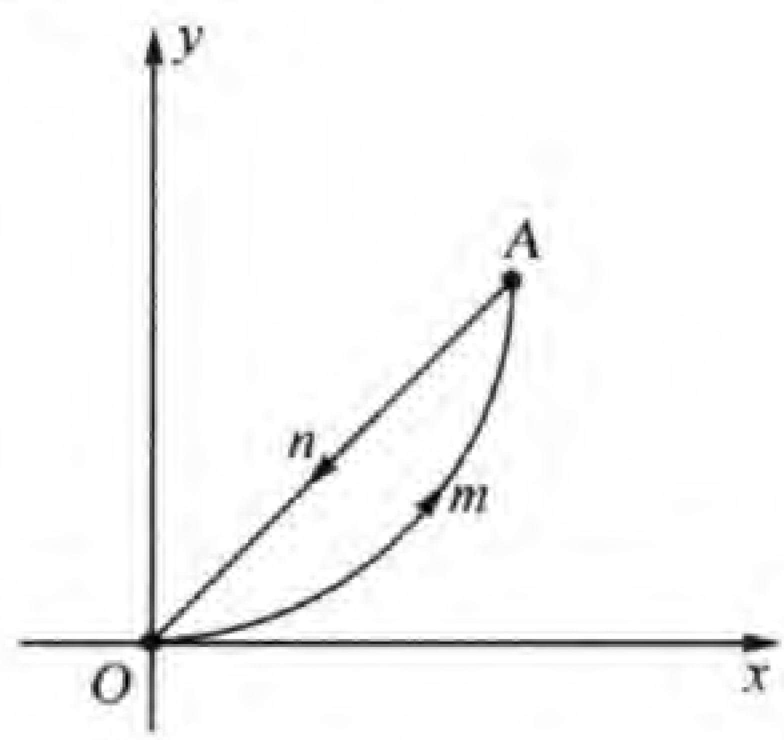
所以 $$\int_{AB}\sin y\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\pi}[\sin(\pi-x)-\sin x]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}(\sin x-\sin x)\mathrm{d}x=0.$$

【4257】 $\oint\limits_{OmAnO}\arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$,式中 OmA 为抛物线段 $y=x^2$ 和 OnA 为直线段 $y=x$.

解 如 4257 题图所示



4257 题图

$$\oint_{OmAnO}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$$

$$=\int_{OmA}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x+\int_{AnO}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 2x\arctan x\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}x+\int_1^0(\arctan 1-1)\mathrm{d}x$$

$$=x^2\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}$$

$$=-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=(\arctan x-x)\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - 1.$$

验证被积函数是全微分，并计算下列曲线积分(4258～4269).

【4258】 $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x.$

解 显然

$$x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = \mathrm{d}(xy),$$

是全微分，所以

$$\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = \int_{(-1,2)}^{(2,3)} \mathrm{d}(xy) = xy\Big|_{(-1,2)}^{(2,3)} = 8.$$

【4259】 $\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y.$

解 显然

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right),$$

是全微分，所以

$$\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \int_{(0,1)}^{(3,-4)} \mathrm{d}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

$$= \frac{x^2+y^2}{2}\Big|_{(0,1)}^{(3,-4)} = 12.$$

【4260】 $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y.$

解 显然

$$(x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$$
$$= (y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) + (x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y)$$
$$= \mathrm{d}(xy) + \mathrm{d}\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right) = \mathrm{d}\left(xy + \frac{x^2-y^2}{2}\right).$$

是全微分，所以

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$$
$$= \int_{(0,1)}^{(2,3)} \mathrm{d}\left(xy + \frac{x^2-y^2}{2}\right)$$

$$= \left(xy + \frac{x^2 - y^2}{2}\right)\Bigg|_{(0,1)}^{(2,3)} = 4.$$

【4261】 $\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)$.

解 $(x-y)(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y) = \mathrm{d}\,\dfrac{(x-y)^2}{2}$,

是全微分,所以

$$\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y) = \int_{(1,-1)}^{(1,1)} \mathrm{d}\,\frac{(x-y)^2}{2}$$

$$= \frac{(x-y)^2}{2}\Bigg|_{(1,-1)}^{(1,1)} = -2.$$

【4262】 $\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x-y)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$. 其中 $f(u)$ 为连续函数.

解 令

$$F(x,y) = \int_0^{x+y} f(u)\mathrm{d}u,$$

由 $f(u)$ 是连续函数,故

$$F'_x(x,y) = f(x+y), F'_y(x,y) = f(x+y),$$

并且它们都是 x,y 的连续函数,因此,$F(x,y)$ 是可微的,且

$$\mathrm{d}F(x,y) = F'_x(x,y)\mathrm{d}x + F'_y(x,y)\mathrm{d}y$$
$$= f(x+y)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y),$$

故 $f(x+y)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$ 是全微分,所以

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) = F(a,b) - F(0,0)$$

$$= \int_0^{a+b} f(u)\mathrm{d}u.$$

【4263】 $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2}$ 为沿着不与 Oy 轴相交的路径.

解 当 $x \neq 0$ 时,

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2} = \mathrm{d}\left(-\frac{y}{x}\right).$$

是全微分,所以

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2} = \int_{(2,1)}^{(1,2)} \mathrm{d}\left(-\frac{y}{x}\right)$$

$$= -\frac{y}{x}\Bigg|_{(2,1)}^{(1,2)} = -\frac{3}{2}.$$

【4264】 $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 为沿着不经过坐标原点的路径.

解 显然当$(x,y) \neq (0,0)$时,

$$\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \mathrm{d}(\sqrt{x^2+y^2}),$$

是全微分,所以

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{(1,0)}^{(6,8)} \mathrm{d}(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\Bigg|_{(1,0)}^{(6,8)} = 9.$$

【4265】 $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)\mathrm{d}x + \psi(y)\mathrm{d}y$,其中$\varphi$和$\psi$为连续函数.

解 因为φ,ψ是连续函数,所以

$$F(x) = \int_{x_1}^{x} \varphi(u)\mathrm{d}u, G(y) = \int_{y_1}^{y} \psi(v)\mathrm{d}v$$

存在,且$F'(x) = \varphi(x)$,$G'(y) = \psi(y)$,

所以 $\varphi(x)\mathrm{d}x + \psi(y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}(F(x)) + \mathrm{d}(G(y))$

$= \mathrm{d}(F(x) + G(y))$,

是全微分,故

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)\mathrm{d}x + \psi(y)\mathrm{d}y = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \mathrm{d}(F(x) + G(y))$$

$$= (F(x) + G(y))\Bigg|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$$

$$= F(x_2) + G(y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y)\mathrm{d}y.$$

【4266】 $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\mathrm{d}y$.

解 $(x^4 + 4xy^3)\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\mathrm{d}y$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{x^5}{5}\right) + 4x^2y^3\,\mathrm{d}x + 6x^2y^2\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}(y^5)$$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{x^5}{5}\right) + \mathrm{d}(2x^2y^3) - \mathrm{d}(y^5)$$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5\right).$$

是全微分，所以

$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5\right)\Bigg|_{(-2,-1)}^{(3,0)} = 62.$$

【4267】 $\displaystyle\int_{(1,\pi)}^{(1,0)} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$ 为沿着不与直线 $y = x$ 相交的线路.

解 当 $x \neq y$ 时，

$$\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)\mathrm{d}y - y\mathrm{d}(x-y)}{(x-y)^2} = \mathrm{d}\left(\frac{y}{x-y}\right).$$

是全微分，所以

$$\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x-y)^2} = \frac{y}{x-y}\Bigg|_{(0,-1)}^{(1,0)} = 1.$$

【4268】 $\displaystyle\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y.$

为沿着不与轴线 Oy 交叉的线路.

解 设

$$P(x,y) = \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right),$$

$$Q(x,y) = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}.$$

当 $x \neq 0$ 时，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}$$

$$=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}.$$

考虑右半平面$\Omega=\{(x,y)\mid x>0\}$，显然，Ω为单连通域，在Ω上，有$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故在$\Omega$上必是某函数$u(x,y)$的全微分，即

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y).$$

从而积分与路径无关，故可选取沿直线段

$$y=\pi\qquad(1\leqslant x\leqslant 2).$$

积分，因此

$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2\left(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(x+\pi\sin\frac{\pi}{x}\right)\Bigg|_1^2=\pi+1.$$

【4269】 $\int_{(0,0)}^{(a,b)}\mathrm{e}^x(\cos y\mathrm{d}x-\sin y\mathrm{d}y).$

解 $\mathrm{e}^x(\cos y\mathrm{d}x-\sin y\mathrm{d}y)=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x\cos y)$，

所以

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)}\mathrm{e}^x(\cos y\mathrm{d}x-\sin y\mathrm{d}y)=\int_{(0,0)}^{(a,b)}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x\cos y)$$

$$=\mathrm{e}^x\cos y\Bigg|_{(0,0)}^{(a,b)}=\mathrm{e}^a\cos b-1.$$

【4270】 证明：若$f(u)$为连续函数且C为逐段光滑的封闭周线，则：

$$\oint_C f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0.$$

证 令

$$F(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2}f(u)\mathrm{d}u.$$

由于$f(u)$是连续函数，故

$$F'_x(x,y)=xf(x^2+y^2),$$

$$F'_y(x,y)=yf(x^2+y^2),$$

并且都是x,y的连续函数，因此$F(x,y)$可微，且

$$dF(x,y) = F'_x(x,y)dx + F'_y(x,y)dy$$
$$= f(x^2+y^2)(xdx+ydy),$$

于是，在 c 上任取一点 (x_0,y_0)，有

$$\oint_c f(x^2+y^2)(xdx+ydy) = F(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y_0)}$$
$$= F(x_0,y_0) - F(x_0,y_0) = 0.$$

求原函数 z，若(4271 ～ 4276).

【4271】 $dz = (x^2+2xy-y^2)dx + (x^2-2xy-y^2)dy.$

解 $z = \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x^2-2xy-y^2)dy + C$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C.$$

【4272】 $dz = \dfrac{ydx - xdy}{3x^2-2xy+3y^2}.$

解 $z = \int_1^y 0dy + \int_0^x \dfrac{ydx}{3x^2-2xy+3y^2} + C_1$

$$= \frac{y}{3}\int_0^x \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{3}y\right)^2 + \frac{8y^2}{9}} + C_1$$

$$= \frac{y}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}y}\cdot\arctan\frac{3\left(x-\frac{y}{3}\right)}{2\sqrt{2}y}\Bigg|_0^x + C_1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{3x-y}{2\sqrt{2}y} + C.$$

【4273】 $dz = \dfrac{(x^2+2xy+5y^2)dx + (x^2-2xy+y^2)dy}{(x+y)^3}$

解 $z = \int_1^y \dfrac{0-0+y^2}{(0+y)^3}dy + \int_0^x \dfrac{x^2+2xy+5y^2}{(x+y)^2}dx + C_1$

$$= \ln|y| + \int_0^x \frac{(x+y)^2+4y^2}{(x+y)^3}dx + C_1$$

$$= \ln|y| + \ln|x+y|\Big|_0^x - \frac{2y^2}{(x+y)^2}\Big|_0^x + C_1$$

$$= \ln|x+y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + C.$$

【4274】 $dz = e^x[e^y(x-y+2)+y]dx + e^x[e^y(x-y)+1]dy.$

解 $z = \int_0^x (x+z)e^x dx + \int_0^y [e^{x+y}(x-y)+e^x]dy + C_1$

$$= (x+1)e^x\Big|_0^x + [(x-y+1)e^{x+y}+ye^x]\Big|_0^y + C_1$$

$$= (x-y+1)e^{x+y} + ye^x + C.$$

【4275】 $dz = \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}dx + \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n \partial y^{m+1}}dy.$

解 因为

$$dz = \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}dx + \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}dy} = d\left(\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}\right),$$

所以 $z = \frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m} + C.$

【4276】 $dz = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dx - \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dy,$

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

解 当$(x,y)\neq(0,0)$时,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{1}{r}\right) = -\frac{x}{r^2}, \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{1}{r}\right) = \frac{y}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right) = -\frac{x^2-y^2}{r^4}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} = -\frac{y^2-x^2}{r^4},$$

故 $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right) = 0. \qquad ①$$

令 $P = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right), Q = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right),$

由 ① 式知,当$(x,y)\neq(0,0)$时,有

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\partial y^m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right] = 0,$$

因此,在任何不含原点(0,0)的单连通区域中,$Pdx+Qdy$ 都是某

函数 z 的全微分，对上半平面上的点 $(x,y)(y>0)$，可取

$$\begin{aligned}
z(x,y) &= \int_0^x P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_1^y Q(0,y)\,\mathrm{d}y + C_1 \\
&= \int_0^x \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_1^y \left[\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]_{x=0}\mathrm{d}y + C_1 \\
&= \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right) \\
&\quad - \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\bigg|_{x=0} \\
&\quad - \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\bigg|_{x=0} \\
&\quad + \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]_{\substack{x=0\\y=1}} + C_1 \\
&= \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n}\partial y^{m-1}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{1}{r}\right) \\
&\quad - \frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m-1}}\left[\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right] + C \\
&= \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n}\partial y^{m-1}}\left(-\frac{x}{r^2}\right) + C \\
&= \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n}\partial y^{m-1}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{x}{y}\right) + C \\
&= \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n}\partial y^{m}}\left(\arctan\frac{x}{y}\right) + C.
\end{aligned}$$

对于 $y<0$，同样有

$$z(x,y) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n}\partial y^{m}}\left(\arctan\frac{x}{y}\right) + C.$$

【4277】 证明：以下估值对于曲线积分是正确的：

$$\left|\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\right| \leqslant LM,$$

其中 L 为积分路径的长且在 C 弧上 $M = \max\sqrt{P^2+Q^2}$.

证 由于

$$\left|\int_c P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|=\left|\int_c (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\,\mathrm{d}s\right|$$
$$\leqslant\int_c |P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\,\mathrm{d}s.$$

而 $$(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2$$
$$=P^2\cos^2\alpha+Q^2\sin^2\alpha+2PQ\sin\alpha\cos\alpha$$
$$0\leqslant(P\sin\alpha-Q\cos\alpha)^2$$
$$=P^2\sin^2\alpha+Q^2\cos^2\alpha-2PQ\sin\alpha\cos\alpha,$$

即有 $$2PQ\sin\alpha\cos\alpha\leqslant P^2\sin^2\alpha+Q^2\cos^2\alpha,$$

故有 $$(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2\leqslant P^2+Q^2,$$

从而 $$|P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\leqslant M,$$

因此 $$\left|\int_c P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\int_c M\,\mathrm{d}s=ML.$$

【4278】 估计积分

$$I_R=\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

证明：$\lim\limits_{R\to\infty}I_R=0$.

证 在圆周 $x^2+y^2=R^2$ 上，有

$$P^2+Q^2=\frac{y^2+x^2}{(x^2+xy+y^2)^4}$$
$$=\frac{R^2}{(R^2+xy)^4}\leqslant\frac{R^2}{(R^2-|xy|)^4}$$
$$\leqslant\frac{R^2}{\left(R^2-\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^4}=\frac{16}{R^6},$$

利用 4277 题的结果有

$$|I_R|\leqslant\frac{4}{R^3}\cdot2\pi R=\frac{8\pi}{R^2},$$

因此 $$\lim_{R\to+\infty}I_R=0.$$

计算沿着空间曲线所取的曲线积分(设坐标系是右手

系)(4279 ~ 4283).

【4279】 $\int_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}y-x^2\mathrm{d}z$，其中 C 为沿着参数递增方向运动的曲线：

$$x=t, y=t^2, z=t^3 \qquad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

解 $\int_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}y-x^2\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1[(t^4-t^6)+2t^5\cdot 2t-t^2\cdot 3t^2]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1(3t^6-2t^4)\mathrm{d}t=\frac{3}{7}-\frac{2}{5}=\frac{1}{35}.$$

【4280】 $\int_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中 C 为沿着参数递增方向运动的螺旋线：

$$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

解 $\int_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$

$$=\int_0^{2\pi}(-a^2\sin^2 t+abt\cos t+ab\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=\left(-\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2\sin 2t}{4}+abt\sin t+ab\cos t+ab\sin t\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=-a^2\pi.$$

【4281】 $\int_C (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中若从 x 轴正向看，C 为逆时针方向的圆周

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad y=x\tan\alpha \quad (0<\alpha<\pi).$$

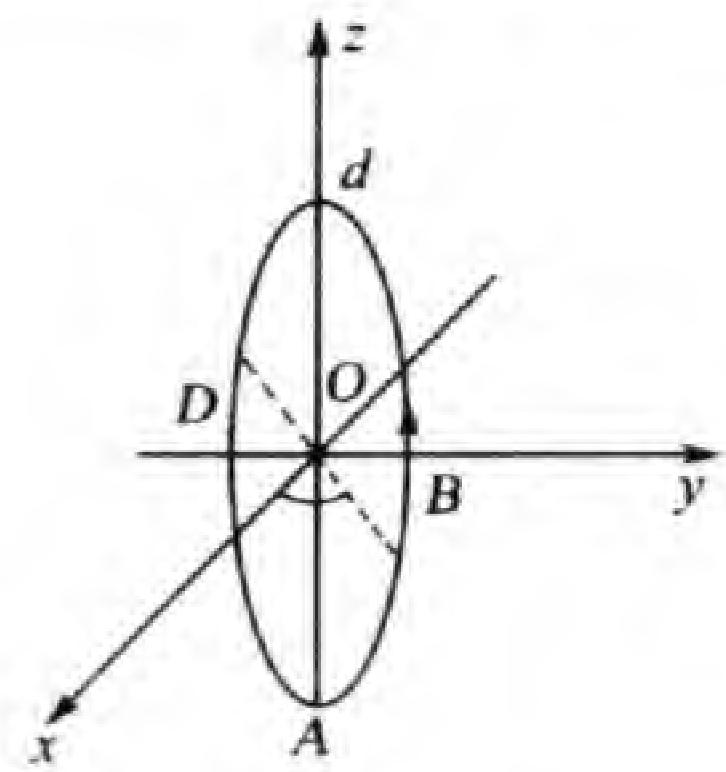
解 如 4281 题图所示

利用球面的参数方程

$$x=a\cos\varphi\cos\psi, y=a\sin\varphi\cos\psi,$$
$$z=a\sin\psi.$$

在 $\overset{\frown}{ABC}$ 上，$\varphi=\alpha$，因而有

$$x=a\cos\alpha\cos\psi, \mathrm{d}x=-a\cos\alpha\sin\psi\mathrm{d}\psi,$$



4281 题图

$$y = a\sin\alpha\cos\psi, \mathrm{d}y = -a\sin\alpha\sin\psi\mathrm{d}\psi,$$
$$z = a\sin\psi, \mathrm{d}z = a\cos\psi\mathrm{d}\psi,$$

所以 $$\int_{\widehat{ABC}}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[-(\sin\alpha\cos\psi-\sin\psi)\cos\alpha\sin\psi$$
$$-(\sin\psi-\cos\alpha\cos\psi)\sin\alpha\sin\psi$$
$$+(\cos\alpha\cos\psi-\sin\alpha\cos\psi)\cos\psi]\mathrm{d}\psi$$
$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\alpha-\sin\alpha)\mathrm{d}\psi = \sqrt{2}a^2\pi\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

在$\widehat{CDA}$ 上,$\varphi = \alpha+\pi$,同样可得

$$\int_{\widehat{CDA}}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$
$$=-a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\alpha-\cos\alpha)\mathrm{d}\psi = \sqrt{2}\pi a^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right),$$

因此,有

$$\int_C(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$
$$= 2\sqrt{2}\pi a^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

【4282】 $\int_C y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$,其中 C 为若从 Ox 轴正值(x

$>a$）部分来看，C 为逆时针方向的维维安尼曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2=ax$（$z\geqslant 0, a>0$）.

解 柱面 $x^2+y^2=az$ 的方程可变为

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

故令 $$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t, y=\frac{a}{2}\sin t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

则 $$z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$$
$$=\sqrt{a^2-\frac{a^2(1+\cos t)^2}{4}+\frac{a^2\sin^2 t}{4}}=a\sin\frac{t}{2},$$

从而，曲线的参数方程为

$$x=\frac{a(1+\cos t)}{2}, y=\frac{a\sin t}{2},$$

$$z=a\sin\frac{t}{2} \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

所以 $$\int_C y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{a^3\sin^3 t}{8}+\frac{a^3\sin^2\frac{t}{2}\cos t}{2}+\frac{a^3(1+\cos t)^2\cdot\cos\frac{t}{2}}{8}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{8}(1-\cos^2 t)\mathrm{d}(\cos t)+\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos t}{2}\cos t\mathrm{d}t$$

$$+a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2\frac{t}{2}\right)^2\mathrm{d}\left(\sin\frac{t}{2}\right)$$

$$=\frac{a^3}{8}\left(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$+\frac{a^3}{4}\left[\sin t-\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$+a^3\left(\sin\frac{t}{2}-\frac{2}{3}\sin^3\frac{t}{2}+\frac{1}{5}\sin^5\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=-\frac{\pi a^3}{4}.$$

【4283】 $\int_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中 C 为球面一部分 $x^2+y^2+z^2=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的周线,沿该周线正向运行时这个曲面的外侧保持在运行的左侧.

解 围线在 xOy 平面部分的方程为

$$x=\cos\varphi, y=\sin\varphi, z=0 \qquad \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

根据轮换对称性,有

$$\begin{aligned}&\int_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z\\&=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^2\varphi\cdot(-\sin\varphi)-\cos^2\varphi\cos\varphi]\mathrm{d}\varphi\\&=3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)\mathrm{d}\cos\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)\mathrm{d}(\sin\varphi)\right)\\&=3\left(\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi-\sin\varphi+\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-4.\end{aligned}$$

利用全微分求下列曲线积分(4284 ~ 4289).

【4284】 $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y-z^3\mathrm{d}z$.

解 因为

$$x\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y-z^3\mathrm{d}z=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}z^4\right),$$

所以
$$\begin{aligned}&\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y-z^3\mathrm{d}z\\&=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}z^4\right)\Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}=-53\frac{7}{12}.\end{aligned}$$

【4285】 $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$.

解 $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=xyz\Big|_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}=0$.

【4286】 $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^3+y^2+z^2}}$,其中点$(x_1,y_1,z_1)$位于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上,而点(x_2,y_2,z_2)位于球面 $x^2+y^2+z^2$

$=b^2$ 上 $(a>0,b>0)$.

解 $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}=b-a.$$

【4287】 $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y+\chi(z)\mathrm{d}z$，其中 φ 和 ψ 为连续函数.

解 因为

$$\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y+\chi(z)\mathrm{d}z$$
$$=\mathrm{d}\left(\int_{x_1}^{x}\varphi(u)\mathrm{d}u+\int_{y_1}^{y}\psi(v)\mathrm{d}v+\int_{z_1}^{z}\chi(w)\mathrm{d}w\right),$$

所以 $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y+\chi(z)\mathrm{d}z$

$$=\left(\int_{x_1}^{x}\varphi(u)\mathrm{d}u+\int_{y_1}^{y}\psi(v)\mathrm{d}v+\int_{z_1}^{z}\chi(w)\mathrm{d}w\right)\Bigg|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(u)\mathrm{d}u+\int_{y_1}^{y_2}\psi(v)\mathrm{d}v+\int_{z_1}^{z_2}\chi(w)\mathrm{d}w.$$

【4288】 $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}f(x+y+z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$，其中 f 为连续函数.

解 令

$$F(x,y,z)=\int_0^{x+y+z}f(u)\mathrm{d}u,$$

由于，$f(u)$ 是连续函数，故

$$F'_x(x,y,z)=f(x+y+z),$$
$$F'_y(x,y,z)=f(x+y+z),$$
$$F'_z(x,y,z)=f(x+y+z),$$

并且这些偏导数都是连续的. 所以 $F(x,y,z)$ 可微，且

$$\mathrm{d}F(x,y,z)=F'_x\mathrm{d}x+F'_y\mathrm{d}y+F'_z\mathrm{d}z$$
$$=f(x+y+z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z).$$

因此 $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$

$$= F(x_2,y_2,z_2) - F(x_1,y_1,z_1)$$

$$= \int_0^{x_2+y_2+z_2} f(u)\mathrm{d}u - \int_0^{x_1+y_1+z_1} f(u)\mathrm{d}u$$

$$= \int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u)\mathrm{d}u.$$

【4289】 $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$，其中 f 为连续函数.

解 令

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2+z^2} f(\sqrt{u})\mathrm{d}u.$$

由于 f 是连续函数，故

$$F'_x(x,y,z) = xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

$$F'_y(x,y,z) = yf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

$$F'_z(x,y,z) = zf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

并且，F'_x，F'_y，F'_z 都连续，所以 $F(x,y,z)$ 可微，且

$$\mathrm{d}F(x,y,z) = F'_x\mathrm{d}x + F'_y\mathrm{d}y + F'_z\mathrm{d}z$$

$$= f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z),$$

因此 $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$

$$= F(x_2,y_2,z_2) - F(x_1,y_1,z_1)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x_1^2+y_1^2+z_1^2}^{x_2^2+y_2^2+z_2^2} f(\sqrt{u})\mathrm{d}u \qquad (\text{令}\sqrt{u} = v)$$

$$= \int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} vf(v)\mathrm{d}v.$$

求原函数 u，若(4290 ～ 4292).

【4290】 $\mathrm{d}u = (x^2-2yz)\mathrm{d}x + (y^2-2xz)\mathrm{d}y + (z^2-2xy)\mathrm{d}z.$

解 $\mathrm{d}u = x^2\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z - 2(yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z)$

$$=\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+\frac{z^3}{3}-2xyz\right),$$

所以

$$u=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C.$$

【4291】 $\mathrm{d}u=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y-\frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z.$

解 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x+\left(-\frac{1}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y\right)+\frac{1}{z}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)-\frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z$

$$=\mathrm{d}x+\mathrm{d}\left(-\frac{x}{y}\right)+\mathrm{d}\left(\frac{xy}{z}\right)=\mathrm{d}\left(x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}\right),$$

所以 $u=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C.$

【4292】 $\mathrm{d}u=\frac{(x+y-z)\mathrm{d}x+(x+y-z)\mathrm{d}y+(x+y+z)\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy}.$

解 由于

$$\begin{aligned}&(x+y-z)\mathrm{d}x+(x+y-z)\mathrm{d}y+(x+y+z)\mathrm{d}z\\&=(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)\\&\quad+(x+y)\mathrm{d}z-z(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+z\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\mathrm{d}[(x^2+y^2+2xy)+z^2]\\&\quad+(x+y)\mathrm{d}z-z\mathrm{d}(x+y),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}[(x+y)^2+z^2]}{(x+y)^2+z^2}+\frac{(x+y)\mathrm{d}z-z\mathrm{d}(x+y)}{(x+y)^2+z^2}\\&=\frac{1}{2}\mathrm{d}\ln[(x+y)^2+z^2]+\mathrm{d}\left(\arctan\frac{z}{x+y}\right)\\&=\mathrm{d}\left[\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+\arctan\frac{z}{x+y}\right],\end{aligned}$$

因此 $u=\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+\arctan\frac{z}{x+y}+C.$

【4293】 当质量为 m 的点从 (x_1,y_1,z_1) 位置移动到 (x_2,y_2,z_2) 位置时(Oz 轴垂直向上),求重力所作的功.

解 设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为各坐标轴上的单位向量,则重力

$$\vec{F}=-mg\vec{k},$$

而
$$d\vec{s}=dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k}.$$

从而功的微分为

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{s}=-mg\,dz,$$

所以,重力所产生的功为

$$A=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}-mg\,dz=-mgz\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}=-mg(z_2-z_1).$$

【4294】 弹力方向指向坐标原点,弹力的大小与质点到坐标原点的距离成正比,若这个点沿逆时针方向描绘出椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的正四分之一,求弹力所作的功.

解 $\vec{F}=-k(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$.

功的微分为

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{s}=-k(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\cdot(dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j})$$
$$=-k(x\,dx+y\,dy)=d\left[-\frac{k}{2}(x^2+y^2)\right].$$

所以,所求功为

$$A=\int_{(a,0)}^{(0,b)}dA=k\int_{(a,0)}^{(0,b)}(x\,dx+y\,dy)$$
$$=-\frac{k}{2}(x^2+y^2)\Big|_{(a,0)}^{(0,b)}=-\frac{k}{2}(a^2-b^2).$$

【4295】 当单位质量从点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 移动到点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 时,求作用于单位质量的引力 $F=\frac{k}{r^2}$(其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,)所做的功.

解 引力指向坐标原点,故它的方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{x}{r},\cos\beta=-\frac{y}{r},\cos\gamma=-\frac{z}{r},$$

引力在坐标轴上的投影为

$$F_{Ox}=-\frac{kx}{r^3},F_{Oy}=-\frac{ky}{r^3},F_{Oz}=-\frac{kz}{r^3},$$

所以,功为

$$\begin{aligned}A&=-k\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{r^3}\\&=-\frac{k}{2}\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Bigg|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\\&=k\left(\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\right).\end{aligned}$$

§12. 格林公式

1. **曲线积分与二重积分的关系**　若 C 是逐段光滑的简单封闭周线,该周线围成单联通的有界域 S,并使域 S 保持在其左边,而函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 与其一阶偏导数 $P'_y(x,y)$ 和 $Q'_x(x,y)$ 一起在域 S 内及其边界上是连续的,则有格林公式:

$$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad ①$$

若把域 S 的边界理解为所有边界周线的和,周线绕转方向选择成域 S 仍在其左边,则公式 ① 对于受几个简单周线围成的有界域 S 也是正确的.

2. **平面域的面积**　由逐段光滑的简单周线 C 围成的图形面积 S 等于:

$$S=\oint_C x\mathrm{d}y=-\oint_C y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\oint_C(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x),$$

在这节中,若不谈相反的情况,假定积分的封闭周线是简单的(没有自交叉点),被它围成的域不含无穷远点,并仍然在其左边(正方向).

【4296】　用格林公式变换曲线积分:

$$I=\oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy,$$

其中周线 C 围成有界域 S.

解 设

$$P=\sqrt{x^2+y^2},Q=xy^2+y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}),$$

从而 $$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=y^2,$$

所以,根据格林公式有

$$I=\iint\limits_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_S y^2\,dxdy.$$

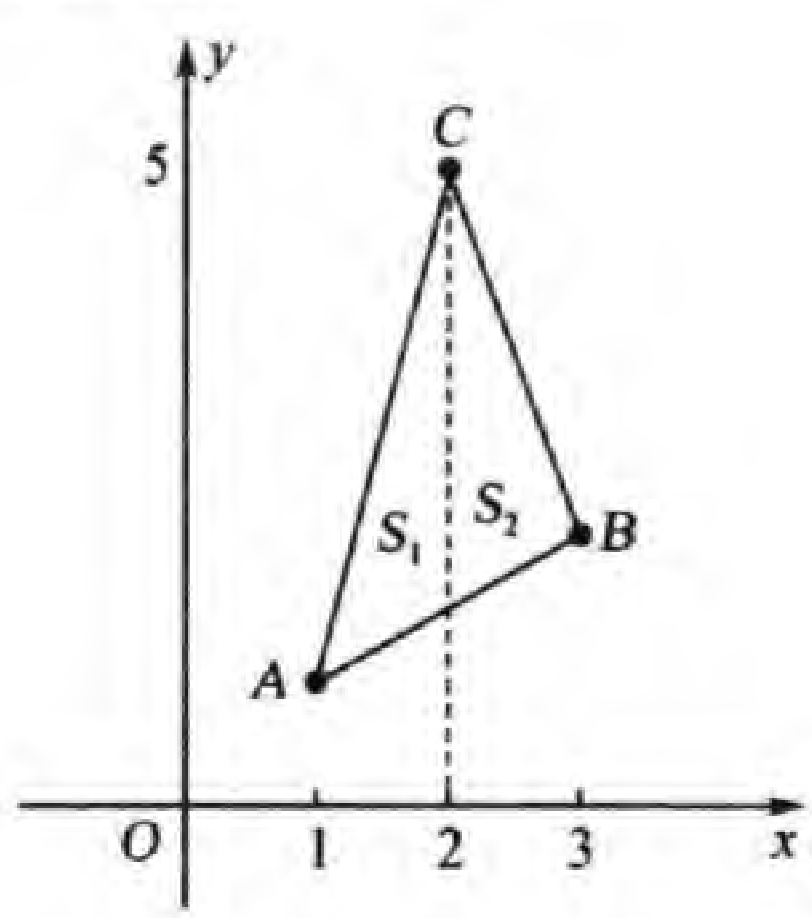
【4297】 运用格林公式计算曲线积分:

$$I=\oint_K (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy,$$

其中 K 为依正向经过以 $A(1,1)$,$B(3,2)$,$C(2,5)$ 为顶点的三角形周线 ABC.

直接计算积分以检查所得的结果.

解 如 4297 题图所示



4297 题图

AC,BC 及 AC 的方程分别为

$$y=\frac{1}{2}(x+1),y=-3x+11,y=4x-3,$$

这里　$P=(x+y)^2, Q=-(x^2+y^2)$.

故　$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2x-2(x+y)=-4x-2y$,

过顶点C引直线垂直于Ox轴,把三角形域S分成S_1和S_2两部分.所以根据格林公式

$$\begin{aligned}I&=\iint_S(-4x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{S_1}(-4x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_2}(-4x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3}(-4x-2y)\mathrm{d}y+\int_2^3\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+11}(-4x\\&\quad-2y)\mathrm{d}y\\&=\int_1^2\left(-\frac{119}{4}x^2+\frac{77}{2}x-\frac{35}{4}\right)\mathrm{d}x-\int_2^3\left(\frac{21}{4}x^2+\frac{49}{2}x-\frac{483}{4}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{245}{12}-\frac{105}{4}=-\frac{140}{3}.\end{aligned}$$

如果直接计算,则

$$\begin{aligned}I&=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}\\&=\int_1^3\left[\left(x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]\mathrm{d}x\\&\quad+\int_3^2[(x-3x+11)^2-(-3)(x^2+9x^2-66x+121)]\mathrm{d}x\\&\quad+\int_2^1[(x+4x-3)^2-4(x^2+16x^2-24x+9)]\mathrm{d}x\\&=\int_1^3\left(\frac{13}{8}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{8}\right)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_3^2(34x^2-242x+484)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_2^1(-43x^2+66x-27)\mathrm{d}x\\&=\frac{58}{3}-\frac{283}{3}+\frac{85}{3}=-\frac{140}{3}.\end{aligned}$$

运用格林公式计算下列曲线积分(4298 ~ 4301).

【4298】 $\oint_C xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x$,其中 C 为圆周 $x^2+y^2=a^2$.

解 $P=-x^2y, Q=xy^2$,

所以 $$\oint xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(y^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi a^4}{2}.$$

【4299】 $\oint_C (x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y$,其中 C 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 $P=(x+y), Q=-(x-y)$,

所以

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-1-1=-2,$$

故 $$\oint_c (x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-2\pi ab.$$

【4300】 $\oint_C \mathrm{e}^x[(1-\cos y)\mathrm{d}x-(y-\sin y)\mathrm{d}y]$,其中 C 为沿正向围成域 $0<x<\pi, 0<y<\sin x$ 的周线.

解 $P=\mathrm{e}^x(1-\cos y), Q=-\mathrm{e}^x(y-\sin y)$,

所以 $$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-\mathrm{e}^x(y-\sin y)-\mathrm{e}^x\sin y=-y\mathrm{e}^x,$$

因此 $$\oint_c \mathrm{e}^x[(1-\cos y)\mathrm{d}x-(y-\sin y)\mathrm{d}y]$$
$$=-\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\sin x}} y\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}y\mathrm{d}y$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\,\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{4}\left(\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\left[e^x-\frac{\cos 2x+2\sin 2x}{5}e^x\right]\Big|_0^\pi$$

$$=\frac{1}{5}(1-e^\pi).$$

【4301】 $\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy)$

解 $P=e^{-(x^2-y^2)}\cos 2xy, Q=e^{-(x^2-y^2)}\sin 2xy$,
所以

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^{-(x^2-y^2)}[(-2x\sin 2xy+2y\cos 2xy$$
$$-(2y\cos 2xy-2x\sin 2xy)]=0,$$

因此 $\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy)$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} 0\,dx\,dy=0.$$

【4302】 以下曲线积分彼此有相差多少?

$$I_1=\int_{AnB}(x+y)^2 ax-(x-y)^2 dy,$$

及

$$I_2=\int_{AnB}(x+y)^2 dx-(x-y)^2 dy,$$

其中 AmB 为连接$A(1,1)$点和 $B(2,6)$点的直线,而 AnB 为具有垂轴且经过 A 和 B 点及坐标原点的抛物线.

解 设抛物线 AnB 的方程为 $y=ax^2+bc+c$,将 $A(1,1)$, $B(2,6)$ 及 $O(0,0)$ 坐标代入得,$a=2,b=-1,c=0$,即抛物线方程为 $y=2x^2-x$,直线 AmB 的方程为$y=5x-4$,

$$P=(x+y)^2, Q=-(x-y)^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2(x-y)-2(x+y)=-4x.$$

利用格林公式有

$$I_2-I_1=\oint_{AnBmA}(x^2+y^2)dx-(x-y)^2 dy$$

$$=\iint\limits_{S}(-4x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2x^2-x}^{5x-4}(-4x)\mathrm{d}y$$

$$=-4\int_1^2 x(-2x^2+6x-4)\mathrm{d}x$$

$$=(2x^4-8x^3+8x^2)\Big|_1^2=-2.$$

【4303】 计算曲线积分

$$\int_{AmO}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y,$$

其中 AmO 为从 $A(a,0)$ 点到 $O(0,0)$ 点的上半圆周 $x^2+y^2=ax$

提示:用 Ox 轴的直线线段 OA 补充路径 AmO 成封闭曲线.

解 用直线段 OA 连接点 $O(0,0)$ 与 $A(a,0)$,这样得到一个封闭的曲线 $AmOA$,它是半圆域 S 的边界

$$S: x^2+y^2\leqslant ax, y\geqslant 0.$$

而在线段 OA 上

$$\int_{OA}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=0,$$

从而有

$$\int_{AmO}=\int_{AmO}+\int_{OA}=\oint_{AmOA}.$$

根据格林公式有

$$\oint_{AmOA}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{S}m\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=m\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi ma^2}{8},$$

因此 $$\int_{AmO}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

【4304】 计算曲线积分

$$\int_{AmB}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y,$$

其中 $\varphi(y)$ 及 $\varphi'(y)$ 为连续函数,AmB 为连接 $A(x_1,y_1)$ 点 $B(x_2,y_2)$ 点的任意路径,而且与 AB 线段一起围成大小为 S 的面

积 $AmBA$.

解 根据格林公式,有

$$\int_{AmB}+\int_{BA}=\oint_{AmBA}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy$$
$$=\iint_S m\,dxdy=mS,$$

而 $$\int_{BA}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy$$
$$=\int_{BA}d[e^x\varphi(y)]-\int_{BA}m(ydx+dy)$$
$$=e^x\varphi(y)\Big|_{(x_2,y_2)}^{(x_1,y_1)}-m\int_{x_2}^{x_1}\left[y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right]dx$$
$$=e^{x_1}\varphi(y_1)-e^{x_2}\varphi(y_2)-m\left(y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x_1-x_2)$$
$$+\frac{m}{2}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_2-x_1)^2$$
$$=e^{x_1}\varphi(y_1)-e^{x_2}\varphi(y_2)+m(y_2-y_1)$$
$$+\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1),$$

因此 $$\int_{AmB}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy$$
$$=mS+e^{x_2}\varphi(y_2)-e^{x_1}\varphi(y_1)-m(y_2-y_1)$$
$$-\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1).$$

【4305】 确定两个连续可微分二次的函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$,使得曲线积分:

$$I=\oint_C P(x+\alpha,y+\beta)dx+Q(x+\alpha,y+\beta)dy,$$

对于任何封闭周线 C 都与常数 α 和 β 无关.

解 由格林公式得

$$I=\iint_S\left[\frac{\partial Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial x}-\frac{\partial P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial y}\right]dxdy$$
$$=A. \qquad ①$$

由假定知 A 与 α,β 无关，只与曲线 C 有关. 上式中的 S 是由 C 围成的闭区域. 又根据题设知，P,Q 具有连续的二阶偏导数. 故 ① 式中二重积分中的被积函数关于 α,β 具有连续的一阶偏导数. 因此，可以在积分号下关于 α,β 求偏导数，得

$$\iint\limits_{S}\left[\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\alpha\partial x}-\frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\alpha\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\partial}{\partial\alpha}A=0, \qquad ②$$

$$\iint\limits_{S}\left[\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial x}-\frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\partial}{\partial\alpha}A=0, \qquad ③$$

② 和 ③ 式对任何 S 都成立. 而 ② 和 ③ 式中二重积分的被积函数是连续的，故被积函数必恒为零. 亦即

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\alpha\partial x}-\frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\alpha\partial y}\equiv 0, \qquad ④$$

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial x}-\frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial y}\equiv 0. \qquad ⑤$$

设 $x+\alpha=u,y+\beta=v.$

显然有
$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial a\partial x}=\frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial a\partial y}=\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial x}=\frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial v\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial y}=\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u^2},$$

所以，④ 与 ⑤ 可改写为

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\right]=\frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u\partial v}$$

$$\equiv 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\right]=\frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial v\partial u}-\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial v^2}$$

$$\equiv 0.$$

由此可知$\dfrac{\partial Q(u,v)}{\partial u}-\dfrac{\partial P(u,v)}{\partial v}\equiv k$(常数).

将 u,v 改记为 x,y,则

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\equiv k(\text{常数}). \tag{⑥}$$

令 $F(x,y)=\int_0^x P(t,y)\mathrm{d}t.$

则 $F(x,y)$ 具有二阶的连续偏导数,且

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=P(x,y). \tag{⑦}$$

由 ⑥ 式知

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}&=k+\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=k+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right)\\&=k+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

上式两边积分得

$$Q(x,y)=kx+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}+\varphi(y). \tag{⑧}$$

由 ⑦ 及 ⑧ 式知 $F(x,y)$ 具有三阶连续的偏导数. 反之,若 $F(x,y)$ 是任一具有三阶连续偏导数的函数,而 $\varphi(y)$ 是任一具有二阶连续导数的函数,则由 ⑦ 和 ⑧ 式确定的 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 必具有二阶连续偏导数,且使 ⑥ 式成立,从而有

$$\begin{aligned}I&=\oint_c P(x+\alpha,y+\beta)\mathrm{d}x+Q(x+\alpha,y+\beta)\mathrm{d}y\\&=\iint_S\left[\frac{\partial Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial x}-\frac{\partial P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_S k\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=kS.\end{aligned}$$

故 I 是与 α,β 无关的常数.

综上所述,可知:使 I 与 α,β 无关的具有二阶连续偏导数的函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 由公式 ⑦ 与 ⑧ 确定,其中,k 为常数,$F(x,$

$y)$ 具有三阶连续偏导数的任一函数，$\psi(y)$ 为二阶连续可微的任一函数.

【4306】 可微分函数 $F(x,y)$ 应当满足什么样的条件可使得曲线积分 $\int_{AmB} F(x,y)(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$ 与积分路径的形状无关?

解 $P = yF(x,y), Q = xF(x,y)$.

由格林公式知所求条件为

$$\frac{\partial}{\partial x}[xF(x,y)] = \frac{\partial}{\partial y}[yF(x,y)],$$

即 $$xF'_x(x,y) = yF'_y(x,y).$$

【4307】 计算 $I = \oint_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$，其中 C 为不通过坐标原点沿正向运动的简单封闭周线.

提示:研究两种情况:(1) 坐标原点在周线之外;(2) 周线包围坐标原点.

解 设

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

分两种情况讨论:

(1) 坐标原点在围线 C 之外，应用格林公式有

$$I = \oint_c P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

(2) 坐标原点在围线 C 之内. 取 a 充分小使得以坐标原点为圆心，a 为半径的圆周 $l_a: x^2 + y^2 = a^2$，完全位于围线 C 之内，由 C 与 l_a 围成的区域记为 S_a，则在 S_a 上，P,Q 有连续的偏导数，应用格林公式有 $\left(\oint_c + \oint_{l_a^-}\right)P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{S_a}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，

其中 l_a^- 表示沿 l_a 的负方向(顺时针方向) 所以

$$I=\oint_{c} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{l_a} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

l_a 的参数方程为

$$x=a\cos t, y=a\sin t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

因此 $$I=\oint_{l_a}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[(a\cos t)(a\cos t)-a\sin t(-a\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.$$

运用曲线积分，计算由以下曲线围成的面积(4308 ~ 4313).

【4308】 椭圆

$$x=a\cos t, y=b\sin t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

解 面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_{c} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t+\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi ab.$$

【4309】 星形线

$$x=a\cos^3 t, y=b\sin^3 t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

解 面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_{c} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t+\cos^2 t\sin^4 t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi ab.$$

【4310】 抛物线 $(x+y)^2=ax (a>0)$ 和 Ox 轴.

解 作变换 $y=tx$，则抛物线方程化为

$$x^2(1+t)^2=ax,$$

从而，抛物线的参数方程为

$$x=\frac{a}{(1+t)^2}, y=\frac{at}{(1+t)^2} \qquad (0\leqslant t<+\infty),$$

它与Ox轴的交点为$(a,0)$与$(0,0)$曲线C由直线段OA,及抛物线弧段$\overset{\frown}{AO}$构成,在直线段OA上,有

$$xdy-ydx=0,$$

在抛物线上有

$$xdy-ydx=\frac{a^2}{(1+t)^4}dt.$$

所以,所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_c xdy-ydx=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^4}$$

$$=-\frac{a^2}{6}\cdot\frac{1}{(1+t)^3}\Big|_0^{+\infty}=\frac{a^2}{6}.$$

【4311】 笛卡尔叶形线$x^3+y^3=3axy(a>0)$.

提示:假定$y=tx$.

解 作代换$y=tx$,得曲线的参数方程为

$$x=\frac{3at}{1+t^3},y=\frac{3at^2}{1+t^3}\qquad(0\leqslant t<+\infty),$$

$$dx=\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}dt,dy=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}dt,$$

从而 $$xdy-ydx=\frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}dt,$$

所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_c xdy-ydx=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt$$

$$=\frac{3a^2}{2}\left(-\frac{1}{1+t^3}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{3a^2}{2}.$$

【4312】 用双纽线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

提示:假定$y=x\tan\varphi$.

解 曲线的极坐标方程为

$$r^2=a^2\cos2\varphi,$$

故 $$x=a\cos\varphi\sqrt{\cos2\varphi},y=a\sin\varphi\sqrt{\cos2\varphi},$$

从而 $$xdy-ydx=a^2\cos2\varphi d\varphi.$$

由对称性有

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\oint_{c} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = a^2.$$

【4313】 曲线 $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ 和坐标轴.

解 作代换 $y = tx$，得曲线的参数方程为

$$x = \frac{1+t^2}{1+t^3}, y = \frac{t(1+t^2)}{1+t^3} \qquad (0 \leqslant t < +\infty),$$

曲线的起点为(1,0)，终点为(0,1)，在曲线上

$$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t,$$

在 Ox 轴从点(0,0)到(1,0)的线段上，及在 Oy 轴从点(0,1)到(0,0)的线段上

$$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = 0,$$

所以，面积为

$$S = \frac{1}{2}\oint_{c} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{0}^{+\infty} \frac{t^4}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t + 2\int_{0}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t\right].$$

利用 3853 题的结果可得

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}B\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}B(1,1) + \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$$

【4314】 计算由曲线围成的面积：

$$(x+y)^{n+m+1}=ax^{n}y^{m}\qquad(a>0,n>0,m>0).$$

解 作代换 $y=tx$，得曲线的参数方程为

$$x=\frac{at^{m}}{(1+t)^{n+m+1}},y=\frac{at^{m+1}}{(1+t)^{n+m+1}}$$

$$(0\leqslant t<+\infty),$$

从而 $\qquad x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{a^{2}t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}}.$

利用3852题的结果，可得

$$S=\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{a^{2}}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^{2}}{2}B(2m+1,2n+1).$$

【4315】 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{n}+\left(\frac{y}{b}\right)^{n}=1\qquad(a>0,b>0,n>0).$$

和坐标轴围成的面积.

提示：假定

$$\frac{x}{a}=\cos^{\frac{2}{n}}\varphi,\frac{y}{b}=\sin^{\frac{2}{n}}\varphi.$$

解 曲线的参数方程为

$$x=a\cos^{\frac{2}{n}}\varphi,y=b\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\qquad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\varphi}{2}\right),$$

所以 $\qquad x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{2ab}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi,$

而在坐标轴上

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0,$$

因此，所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2ab}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cdot\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{ab}{n} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{ab}{2n} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

【4316】 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$$

$$(a > 0, b > 0, n > 1)$$

和坐标轴围成的面积.

解 令

$$y = \frac{b}{a} t.$$

则得曲线的参数方程为

$$x = \frac{a(1 + t^{n-1})}{1 + t^n}, y = \frac{bt(1 + t^{n-1})}{1 + t^n} \qquad (0 \leqslant t < +\infty),$$

所以 $$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = ab \frac{(1 + t^{n-1})^2}{(1 + t^n)^2} \mathrm{d}t,$$

而在两坐标轴上,有

$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0.$$

根据面积公式并利 3853 题的结果,可得

$$S = \frac{1}{2} \oint_c x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{ab}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(1 + t^{n-1})^2}{(1 + t^n)^2} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{ab}{2} \left[\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n-2}}{(1 + t^n)^2} \mathrm{d}t + 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(1 + t^n)^2} \mathrm{d}t \right.$$

$$\left. + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t^n)^2} \right]$$

$$= \frac{ab}{2} \left[\frac{1}{n} B\left(2 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) - \frac{2}{n} \frac{1}{1 + t^n} \Big|_0^{+\infty} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{ab}{n} \left[1 + B\left(2 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{ab}{n}\left[1+\frac{\Gamma\left(2-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(2)}\right]$$

$$= \frac{ab}{n}\left[1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{ab}{n}\left[1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right].$$

【4317】 计算曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{x}{a}\right)^{n}\left(\frac{y}{b}\right)^{n}$$

$$(a>0,b>0,c>0,n>0).$$

围成的面积.

解 令

$$y=\frac{a}{b}xt,$$

得曲线的参数方程为

$$x=\frac{act^{n}}{1+t^{2n+1}},y=\frac{bct^{n+1}}{1+t^{2n+1}}\qquad(0\leqslant t<+\infty),$$

所以 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{abc^{2}t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^{2}\mathrm{d}t},$

因此面积为

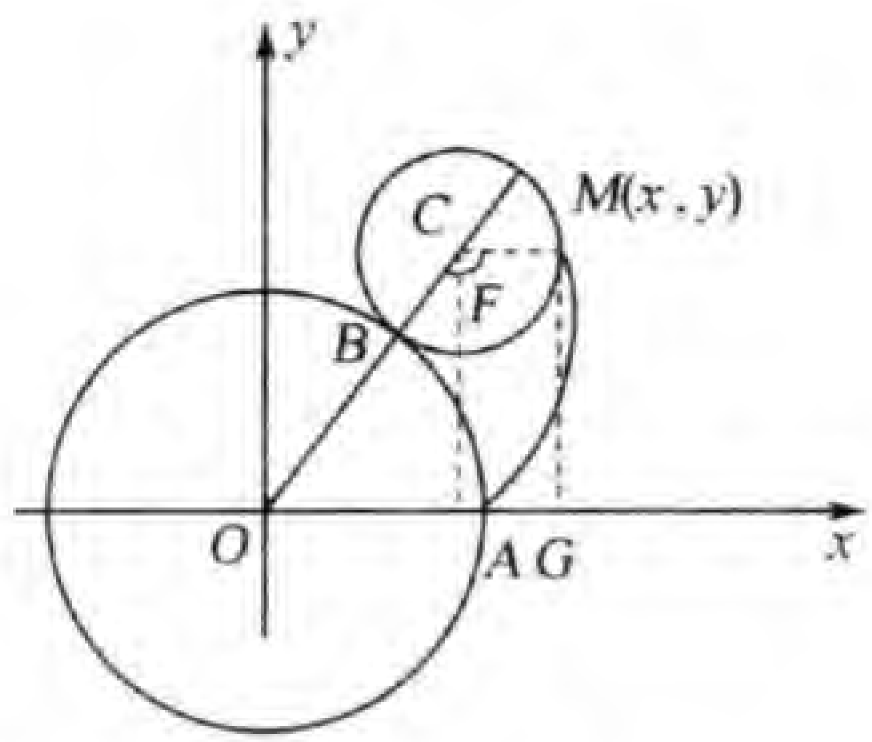
$$S=\frac{1}{2}\oint_{c}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{abc^{2}}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^{2}}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{abc^{2}}{2(2n+1)}\cdot\frac{1}{1+t^{2n+1}}\bigg|_{0}^{+\infty}=\frac{abc^{2}}{2(2n+1)}.$$

【4318】 一个半径为r的圆沿着半径为R的固定圆圆圈外面滚动(不滑动)时,由活动圆上的一点描绘的曲线被称之为外摆线.

假定比值$\frac{R}{r}=n$是整数($n\geqslant 1$).求由外摆线所界的面积.请分析特殊情况$r=R$(心形线).

解 取定圆的中心 O 作坐标原点,Ox 轴通过动点的起始位置 A,即为两圆的公切点时的位置. 外摆线的方程推导如下:设动圆的圆心为 C,两圆的切点为 B,记 $\angle MCB = t$(运动开始时,设 $t = 0$). 则切点在定圆上所移过的弧$\overset{\frown}{AB}$ 等于它在动圆上所移过的弧$\overset{\frown}{AB}$,即



4318 题图

$$R \cdot \angle AOB = \frac{R}{n} \cdot \angle MCB = \frac{R}{n} \cdot t,$$

从而 $\angle AOB = \frac{t}{n}$,设动点 M 的坐标为(x, y),则

$$\begin{aligned} x &= OG = OE + FM \\ &= \left(R + \frac{R}{n}\right)\cos\frac{t}{n} + \frac{R}{n} \cdot \sin\angle FCM, \end{aligned}$$

但 $$\angle FCM = \angle BCM - \angle OCE,$$

且 $$\angle OCE = \frac{\pi}{2} - \angle COE = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{n},$$

从而 $$\angle FCM = \left(1 + \frac{1}{n}\right)t - \frac{\pi}{2},$$

$$\sin\angle FCM = -\cos\left(1 + \frac{1}{n}\right)t,$$

所以 $$x = R\left(1 + \frac{1}{n}\right)\cos\frac{t}{n} - \frac{R}{n}\cos\left(1 + \frac{1}{n}\right)t,$$

同样 $$y = CE - CF$$

$$= R\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{t}{n}-\frac{R}{n}\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)t.$$

若记 $\varphi=\frac{t}{n}$，并注意到 $R=nr$，外摆线的参数方程为

$$x=(n+1)r\cos\varphi-r\cos(n+1)\varphi,$$
$$y=(n+1)r\sin\varphi-r\sin(n+1)\varphi.$$

由 $R=nr$ 知，当动圆滚动 n 圈后，起点与终点重合，即 φ 的变化范围为 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$，故所求面积为

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\oint_c x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\\&=\frac{r^2(n+1)(n+2)}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos n\varphi)\mathrm{d}\varphi\\&=\pi r^2(n+1)(n+2).\end{aligned}$$

特别地，当 $R=r$ 时，即 $n=1$，可知心脏线所界的面积为 $S=6\pi r^2$.

【4319】 一个半径为 r 的圆沿着半径为 R 的固定圆圆圈里面滚动（不滑动）时，由活动圆上的一点描绘的曲线被称之为内摆线.

假定比值 $\frac{R}{r}=n$ 是整数 $(n\geqslant 1)$. 求由内摆线所界的面积. 请分析特殊情况 $r=\frac{R}{4}$（星形线）.

解 和上题一样可求得内摆线的参数方程为

$$x=r(n-1)\cos\varphi+r\cos(n-1)\varphi,$$
$$y=r(n-1)\sin\varphi-r\sin(n-1)\varphi$$
$$(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

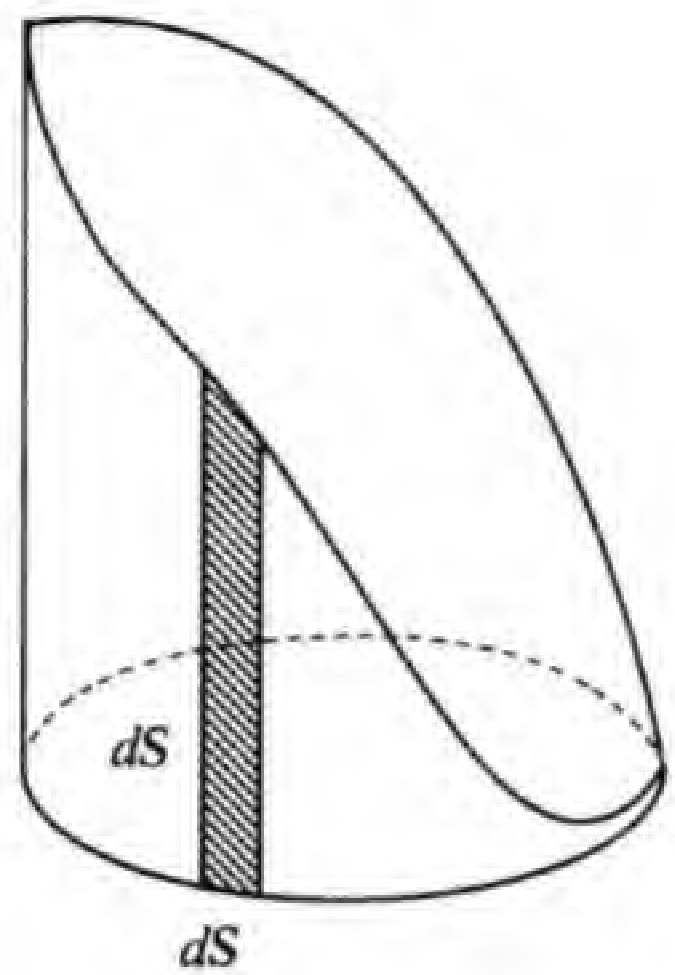
故所求面积为

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\oint_c x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\\&=\frac{r^2(n-1)(n-2)}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos n\varphi)\mathrm{d}\varphi\\&=\pi r^2(n-1)(n-2).\end{aligned}$$

特别地,当 $r=\dfrac{R}{4}$ 时,即 $n=4$,得星形线所界面积为 $S=6\pi r^2$.

【4320】 计算割下柱面 $x^2+y^2=ax$ 被曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 部分的面积.

解 两曲面的交线为



4320 题图

$$x^2+y^2=ax, z^2=a^2-ax.$$

考虑 xOy 平面上($z\geqslant 0$)的那部分面积以 c 表示 xOy 平面上圆周

$$x^2+y^2=ax, z=0,$$

其弧长记为 s,则面积微元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{a^2-ax}\,\mathrm{d}s.$$

因此,所求面积为

$$S=2\oint_c\sqrt{a^2-ax}\,\mathrm{d}s.$$

$x^2+y^2=ax$ 可化为 $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$,

所以 c 的参数方程为

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\varphi, y=\frac{a}{2}\sin\varphi,$$

从而 $\quad \mathrm{d}s=\dfrac{a}{2}\mathrm{d}\varphi.$

因此 $S = 2\oint_{c} \sqrt{a^2 - ax}\,ds$

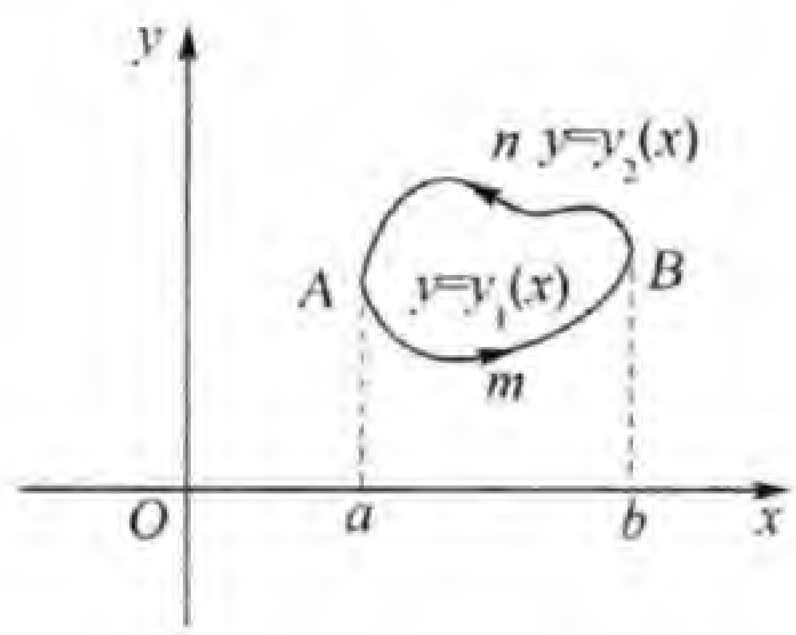
$$= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2}{2}(1-\cos\varphi)} \cdot \frac{a}{2}\,d\varphi$$

$$= 2\int_0^{2\pi} a^2 \sin\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 4a^2.$$

【4320.1】 证明:位于上半平面 $y \geqslant 0$ 的简单封闭周线 C 围绕 Ox 轴旋转所形成的物体体积等于:

$$V = -\pi\oint_C y^2\,dx.$$

证 如4320.1题图所示.简单闭曲线可分为两部分,设上面曲线的方程为



4320.1题图

$$y = y_2(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

下面曲线的方程为

$$y = y_1(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

故所求体积为

$$V = \pi\int_a^b y_2^2(x)\,dx - \pi\int_a^b y_1^2(x)\,dx$$

$$= \pi\int_{\widehat{AnB}} y^2\,dx - \pi\int_{\widehat{AmB}} y^2\,dx$$

$$= -\pi\int_{\widehat{BnA}} y^2\,dx - \pi\int_{\widehat{AmB}} y^2\,dx = -\pi\oint_c y^2\,dx.$$

【4321】 若 $X = ax + by, Y = cx + dy$,C 为包围坐标系点的简单封闭周线($ad - bc \neq 0$),则计算:

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}.$$

解 由于

$$ad-bc\neq 0.$$

故只有原点(0,0),使

$$X^2+Y^2=0.$$

又
$$\begin{aligned}&X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X\\&=(ax+by)(c\mathrm{d}x+d\mathrm{d}y)-(cx+dy)(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y)\\&=(ad-bc)(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}x}{X^2+Y^2}\\&=\frac{1}{2\pi}\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中
$$P=-\frac{(ad-bc)y}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2},$$

$$Q=\frac{(ad-bc)x}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}.$$

而
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{(ad-bc)[(a^2+c^2)x^2-(b^2+d^2)y^2]}{[(ax+by)^2+(cx+dy)^2]^2}$$
$$((x,y)\neq(0,0)).$$

故由格林公式知

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2\pi}\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2\pi}\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 L 为包围原点(0,0),且位于 C 内的任一简单闭曲线. 特别地,可取 L 为

$$(ax+by)^2+(cx+dy)^2=r^2,$$

即
$$X^2+Y^2=r^2,$$

其中 r 充分小. 因此

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=\frac{1}{2\pi}\oint_L\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi r^2} \oint_{X^2+Y^2=r^2} X\mathrm{d}Y - Y\mathrm{d}X$$

$$= \frac{ad-bc}{2\pi r^2} \oint_{X^2+Y^2=r^2} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{ad-bc}{2\pi r^2} \iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{ad-bc}{\pi r^2} \iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2} \left| \frac{D(x,y)}{D(X,Y)} \right| \mathrm{d}X\mathrm{d}Y$$

$$= \frac{ad-bc}{\pi r^2} \iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2} \frac{1}{|ad-bc|} \mathrm{d}X\mathrm{d}Y$$

$$= \frac{ad-bc}{\pi r^2} \cdot \frac{1}{|ad-bc|} \cdot \pi r^2 = \mathrm{sgn}(ad-bc).$$

【4322】 若 $X=\varphi(x,y)$,$Y=\psi(x,y)$,C 为包围坐标原点的简单周线,而且曲线 $\varphi(x,y)=0$ 和 $\psi(x,y)=0$ 在周线 C 内具有几个简单交点,计算积分 I(参见上题).

解 设

$$\varphi(x,y)=0, \psi(x,y)=0,$$

在 C 内的简单交点

$$P_i(x_i,y_i) \qquad (i=1,2,\cdots,m).$$

首先注意本题应假设 $\varphi(x,y)$ 与 $\psi(x,y)$ 在 C 围成的区域内具有连续的二阶偏导数,并且在各点 $P_i(i=1,2,\cdots,m)$ 处有

$$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)} = \varphi'_x\psi'_y - \varphi'_y\psi'_x \neq 0,$$

又 $$X\mathrm{d}Y - Y\mathrm{d}X = \varphi(\psi'_x\mathrm{d}x + \psi'_y\mathrm{d}y) - \psi(\varphi'_x\mathrm{d}x + \varphi'_y\mathrm{d}y)$$
$$= (\varphi\psi'_x - \psi\varphi'_x)\mathrm{d}x + (\varphi\psi'_y - \psi\varphi'_y)\mathrm{d}y,$$

从而 $$I = \frac{1}{2\pi}\oint_c \frac{X\mathrm{d}Y - Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\oint_c P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中 $$P(x,y) = \frac{\varphi\psi'_x - \psi\varphi'_x}{\varphi^2+\psi^2},$$

$$Q(x,y)=\frac{\varphi\psi'_y-\psi\varphi'_y}{\varphi^2+\psi^2}.$$

经计算可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}&=\frac{\partial P}{\partial y}\\&=\frac{1}{(\varphi^2+\psi^2)^2}[(\varphi\psi''_{xy}-\varphi''_{xy}\psi)(\varphi^2+\psi^2)\\&\quad-(\varphi'_x\psi'_y+\varphi'_y\psi'_x)\varphi^2+(\varphi'_y\psi'_x+\varphi'_x\psi'_y)\psi^2\\&\quad+2(\varphi'_x\varphi'_y-\psi'_x\psi'_y)\varphi\psi]\\&\qquad\qquad((x,y)\neq(x_i,y_i),i=1,\cdots,m).\end{aligned}$$

由于

$$\left.\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right|_{(x_i,y_i)}\neq 0,$$

所以,我们可取 $r>0$ 充分小,围绕 $P_i(x_i,y_i)$ 作简单闭曲线 C_i: $[\varphi(x,y)]^2+[\psi(x,y)]^2=r^2(i=1,2,\cdots,m)$,使得$C_i$互不相交且都位于$C$内,并且$\dfrac{D(X,Y)}{D(x,y)}$ 在 $S_i=\{(x,y)\mid X^2+Y^2\leqslant r^2\}$ 上保持定号,根据格林公式有

$$\begin{aligned}&\oint_c P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\sum_{i=1}^{m}\oint_{c_i}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

从而 $$I=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\oint_{c_i}\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2},\qquad ①$$

但 $$\begin{aligned}\oint_{c_i}\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}&=\frac{1}{r^2}\oint_{c_i}X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X\\&=\frac{1}{r^2}\oint_{c_i}(\varphi\psi'_x-\varphi'_x\psi)\mathrm{d}x+(\varphi\psi'_y-\varphi'_y\psi)\mathrm{d}\psi\\&=\frac{1}{r^2}\iint_{S_i}2(\varphi'_x\psi'_y-\varphi'_y\psi'_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{2}{r^2}\iint_{S_i}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{r^2}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{p_i}\iint_{S_i}\left|\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2}{r^2}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{p_i}\iint_{X^2+Y^2\leqslant r^2}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y$$

$$= \frac{2}{r^2}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{p_i}\cdot \pi r^2$$

$$= 2\pi\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{p_i}.$$

代入 ① 式即得

$$I = \sum_{i=1}^{m}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{p_i}.$$

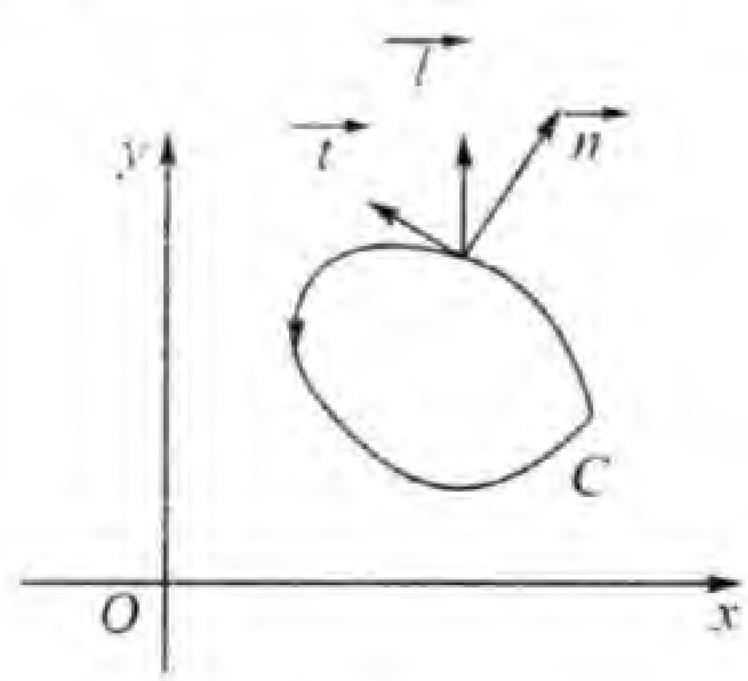
其中 $X=\varphi(x,y),Y=\psi(x,y)$.

【4323】 证明:若 C 为封闭周线,$\boldsymbol{l}$ 为任意方向,则

$$\oint_C \cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\mathrm{d}s = 0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为周线 C 的外法线.

证 如 4323 题图所示



4323 题图

不妨规定 C 的方向为逆时针方向以 $\vec{t}$ 表示,由于

$$(\vec{l},\vec{n}) = (\vec{l},x)-(\vec{n},x),$$

故得 $\cos(\vec{l},\vec{n}) = \cos(\vec{l},x)\cos(\vec{n},x)+\sin(\vec{l},x)\sin(\vec{n},x).$

但 $\sin(\vec{n},x) = \sin\left[(\vec{t},x)-\frac{\pi}{2}\right] = -\cos(\vec{l},x),$

$$\cos(\vec{n},x)=\cos\left[(\vec{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin(\vec{t},x),$$

且 $$\cos(\vec{t},x)=\frac{dx}{ds},\sin(\vec{t},x)=\frac{dy}{ds},$$

因此 $$\cos(\vec{l},\vec{n})ds=\cos(\vec{l},x)dy-\sin(\vec{l},x)dx.$$

利用格林公式，并注意到 $\sin(\vec{l},x)$，$\cos(\vec{l},x)$ 均为常数，有

$$\oint_c\cos(\vec{l},\vec{n})ds=\oint_c[-\sin(\vec{l},x)dx+\cos(\vec{l},x)dy]$$

$$=\iint_S 0dxdy=0,$$

其中 S 表示 C 所围的区域.

【4324】 求积分值：

$$I=\oint_C[x\cos(\boldsymbol{n},x)+y\cos(\boldsymbol{n},y)]ds.$$

其中 C 为包围有界域 S 的简单封闭曲线，$\boldsymbol{n}$ 为它的外法线.

解 $$\cos(\vec{n},x)=\cos\left[(\vec{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\sin(\vec{t},x)=\frac{dy}{ds},$$

$$\cos(\vec{n},y)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\vec{n},x)\right]=\sin(\vec{n},x)$$

$$=\sin\left[(\vec{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=-\cos(\vec{t},x)=-\frac{dx}{ds},$$

其中，$\vec{t}$ 表示 C 的方向，所以

$$I=\oint_c xdy-ydx=2\iint_S dxdy=2S,$$

其中 S 表示 C 所围之域及其面积.

【4325】 求 $\lim\limits_{d(S)\to0}\dfrac{1}{S}\oint_C(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})ds.$

其中 S 为包含 (x_0,y_0) 点的周线 C 所围的面积；$d(S)$ 为域 S 的直径，$\boldsymbol{n}$ 为周线 C 的外法线单位向量，$\boldsymbol{F}\{x,y\}$ 为在 $S+C$ 中的连续可

微分向量.

解 设 $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$,

而 $$\vec{n}_x=\cos(\vec{n},x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},$$

$$\vec{n}_y=\cos(\vec{n},y)=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},$$

所以 $$(\vec{F},\vec{n})\mathrm{d}s=(X\vec{n}_x+Y\vec{n}_y)\mathrm{d}s=X\mathrm{d}y-Y\mathrm{d}x.$$

故利用格林公式及中值定理有

$$\oint_c(\vec{F},\vec{n})\mathrm{d}s=\oint_c X\mathrm{d}y-Y\mathrm{d}x=\iint_S\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\Bigg|_{(\xi,\eta)}\cdot S,$$

其中 $(\xi,\eta)\in S$, 所以

$$\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{S}\oint_c(\vec{F},\vec{n})\mathrm{d}s=\lim_{d(S)\to 0}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\Bigg|_{(\xi,\eta)}$$

$$=X'_x(x_0,y_0)+Y'_y(x_0,y_0).$$

§13. 曲线积分在物理学上的应用

【4326】 均匀分布在圆 $x^2+y^2=a^2$, $y\geqslant 0$ 的上半部的质量 M 用多大力吸引位于 $(0,0)$ 的质量 m 的质点?

解 由对称性知,引力在 Ox 轴的投影为 $X=0$,故只需计算引力在 Oy 轴上的投影.

设圆的参数方程为:

$$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta.$$

则 $$\mathrm{d}s=ad\theta,$$

对于长为 $\mathrm{d}s$ 的一段圆弧,吸引质量为 m 位于坐标原点的质点的引力在 Oy 轴上的投影为

$$\mathrm{d}Y=\frac{km\dfrac{M}{\pi a}}{a^2}\sin\theta\cdot ad\theta=\frac{kmM}{\pi a^2}\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

其中 k 为引力常数,因此所求力在 Oy 轴上的投影为

$$Y=\frac{kmM}{a^2}\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2kmM}{a^2}.$$

【4327】 计算单层的对数位:

$$u(x,y)=\oint_C k\ln\frac{1}{r}\mathrm{d}s,$$

其中 $k=$ 常数,为密度,$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$,周线 C 是圆周 $\xi^2+\eta^2=R^2$.

解 设

$$\vec{l}=x\vec{i}+y\vec{j},\vec{l_1}=\xi\vec{i}+\eta\vec{j},\rho=\sqrt{x^2+y^2},$$

θ 为 $\vec{l}$ 与 $\vec{l_1}$ 的夹角,即 $\theta=(\vec{l},\vec{l_1})$,则

$$x\xi+\eta y=R\rho\cos\theta,$$

从而根据对称性有,对数位

$$\begin{aligned}u(x,y)&=2k\int_0^{\pi}\ln\frac{1}{r}\cdot R\mathrm{d}\theta\\&=2Rk\int_0^{\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{R^2-2R\rho\cos\theta+\rho^2}}\mathrm{d}\theta\\&=-Rk\int_0^{\pi}\ln R^2\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

利用 2192 题的结果可得

$$\int_0^{\pi}\ln\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0 & \rho\leqslant R\\ 2\pi\ln\frac{\rho}{R} & \rho>R,\end{cases}$$

因此,我们有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=-2Rk\int_0^{\pi}\ln R\mathrm{d}\theta\\&\quad-Rk\int_0^{\pi}\ln\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]\mathrm{d}\theta\\&=\begin{cases}2\pi Rk\ln\frac{1}{R} & \rho\leqslant R\\ 2\pi Rk\ln\frac{1}{\rho} & \rho>R.\end{cases}\end{aligned}$$

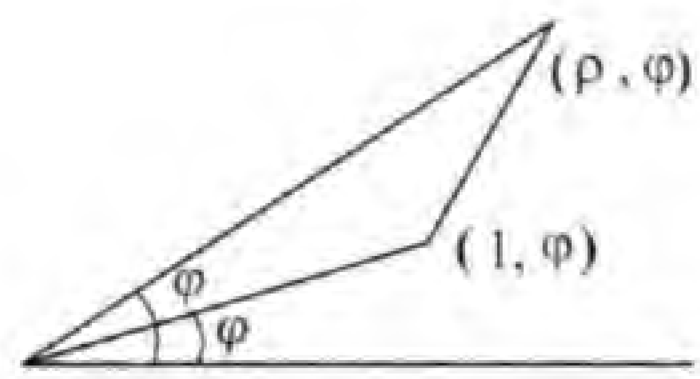
【4328】 用极坐标 ρ 和 φ 计算单层的对数位：

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \ln \frac{1}{r} \mathrm{d}\psi,$$

和
$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln \frac{1}{r} \mathrm{d}\psi,$$

其中 r 为(ρ,φ) 点与动点$(1,\psi)$ 之间的距离，m 为自然数.

解 由于



4328 题图

$$r = \sqrt{(\rho\cos\varphi - \cos\psi)^2 + (\rho\sin\varphi - \sin\psi)^2}$$
$$= \sqrt{1 - 2\rho\cos(\psi - \varphi) + \rho^2},$$

所以
$$I_1 = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln[1 - 2\rho\cos(\psi - \varphi) + \rho^2]\mathrm{d}\psi,$$

作变换 $\psi - \varphi = \theta$，并利用周期性可得

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \cos m(\varphi + \theta)\ln(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)\mathrm{d}\theta$$
$$= -\frac{1}{2}\Big[\cos m\varphi\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \cos m\theta \ln(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)\mathrm{d}\theta$$
$$- \sin m\varphi\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \sin m\theta \ln(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)\mathrm{d}\theta\Big]$$
$$= -\frac{1}{2}\Big[\cos m\varphi\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \ln(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)\mathrm{d}\theta$$
$$- \sin m\varphi\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \ln(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)\mathrm{d}\theta\Big]$$
$$= -\cos m\varphi\int_0^{\pi} \cos m\theta \ln(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)\mathrm{d}\theta.$$

下面分三种情况来讨论

1° $0 \leqslant \rho < 1$ 时，根据 2969 题的结果，并注意到

$$\int_0^{\pi}\cos m\theta\cdot\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \dfrac{\pi}{2} & m=n,\end{cases}$$

$$I_1=-\cos m\varphi\left(-\frac{\rho^m}{m}\pi\right)=\frac{\pi}{m}\rho^m\cos m\varphi.$$

2° $\rho=1$ 时，根据 2970 题的结果有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\cos m\theta\ln(2-2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=2\int_0^{\pi}\ln2\cdot\cos m\theta\,\mathrm{d}\theta+2\int_0^{\pi}\cos m\theta\cdot\ln\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\\&=2\ln2\cdot\frac{\sin m\theta}{m}\Big|_0^{\pi}+\left(-\frac{\pi}{m}\right)=-\frac{\pi}{m},\end{aligned}$$

故，此时 $I_1=\dfrac{\pi}{m}\cos m\varphi$.

3° $\rho>1$ 时，

$$\begin{aligned}I_1=&-\cos m\varphi\Big[\int_0^{\pi}\cos m\theta\cdot\mathrm{d}n\rho^2\,\mathrm{d}\theta\\&+\int_0^{\pi}\cos m\theta\ln\Big[1-2\cdot\frac{1}{\rho}\cos\theta+\left(\frac{1}{\rho}\right)^2\Big]\mathrm{d}\theta\\&=-\cos m\varphi\Big[\ln\rho^2\cdot\frac{\sin m\theta}{m}\Big|_0^{\pi}-\frac{\pi}{m}\left(\frac{1}{\rho}\right)^n\Big]\\&=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi,\end{aligned}$$

因此 $$I_1=\begin{cases}\dfrac{\pi}{m}\rho^m\cos m\varphi, & 0\leqslant\rho\leqslant1\\ \dfrac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi, & \rho>1,\end{cases}$$

同样可得

$$I_2=\begin{cases}\dfrac{\pi}{m}\rho^m\sin m\varphi, & 0\leqslant\rho\leqslant1\\ \dfrac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi, & \rho>1.\end{cases}$$

【4329】 计算高斯积分：

$$u(x,y)=\oint_C \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s,$$

其中 $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ 为连接 $A(x,y)$ 点与简单光滑封闭周线 C 的动点 $M(\xi,\eta)$ 的向量的长度 $\boldsymbol{r}$,$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 与在曲线 C 的点 M 的外法线 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角.

解 设 $\vec{n}$ 与 Ox 轴的夹角为 α,$\vec{r}$ 与 Ox 轴的夹角为 β

$$\vec{r}=(\xi-x)\vec{i}+(\eta-y)\vec{j}.$$

则
$$\cos\beta=\frac{\xi-x}{r},\sin\beta=\frac{\eta-y}{r},$$

$$\cos(\vec{r},\vec{n})=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{\xi-x}{r}\cdot\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\sin\alpha,$$

代入高斯积分,得

$$u(x,y)=\oint_c\left(\frac{\eta-y}{r^2}\sin\alpha+\frac{\xi-x}{r^2}\cos\alpha\right)\mathrm{d}s$$
$$=\oint_c\left(-\frac{\eta-y}{r^2}\mathrm{d}\xi+\frac{\xi-x}{r^2}\mathrm{d}\eta\right)$$
$$=\oint_c P\mathrm{d}\xi+Q\mathrm{d}\eta,$$

其中
$$P=-\frac{\eta-y}{r^2},Q=\frac{\xi-x}{r^2},$$

则有
$$\frac{\partial Q}{\partial\xi}=\frac{1}{r^2}-\frac{2(\xi-x)}{r^3}\cdot\frac{\zeta-x}{r}$$
$$=\frac{(\eta-y)^2-(\xi-x)^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial P}{\partial\eta}=\frac{(\eta-y)^2-(\xi-x)^2}{r^4},$$

除去点 $A(x,y)$ 外

$$\frac{\partial Q}{\partial\xi}=\frac{\partial P}{\partial\eta}.$$

分三种情况来讨论

1° 点 A 在封闭曲线 C 之外,则由格林公式立得

$$u(x,y)=\oint_{c}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\mathrm{d}s$$
$$=\iint_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

2° 点 A 在闭曲线 C 之内，则以 A 点为圆心充分小的正数 ε 为半径作圆周 l_ε，使 l_ε 完全落在 C 内. 设 C 所围的域为 S，l_ε 所围的圆域为 S_ε，则根据格林公式，有

$$\oint_{c+l_\varepsilon^-}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\mathrm{d}s=\oint_{c+l_\varepsilon^-}P\mathrm{d}\xi+Q\mathrm{d}\eta$$
$$=\iint_{S\setminus S_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial\xi}-\frac{\partial P}{\partial\eta}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=0.$$

其中 l_ε^- 是 l_ε 取反向的曲线. 故得

$$u(x,y)=\oint_{c}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\mathrm{d}s=\oint_{l_\varepsilon}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\mathrm{d}s.$$

在 l_ε 上

$$r=\varepsilon,\cos(\vec{r},\vec{n})=1,$$

代入上式得

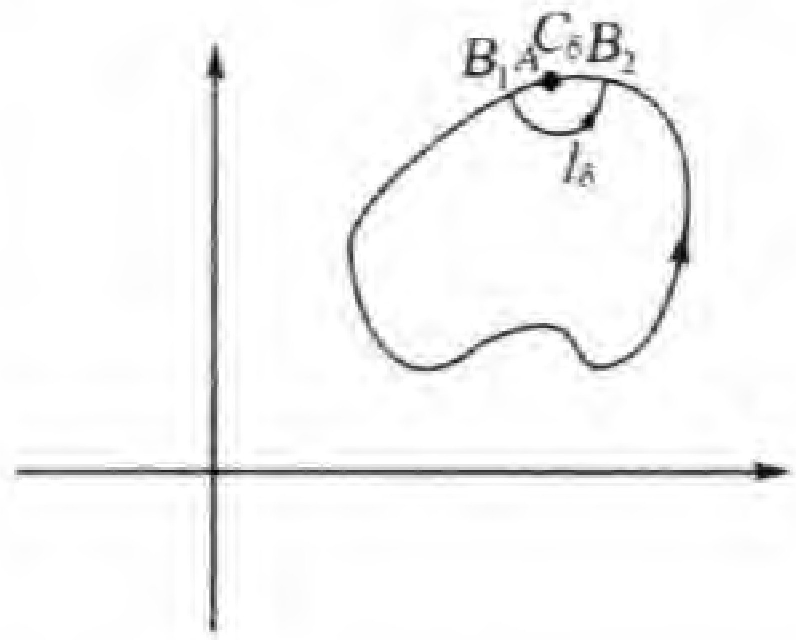
$$u(x,y)=\frac{1}{\varepsilon}\oint_{l_\varepsilon}\mathrm{d}s=2\pi.$$

3° 点 A 在围线 C 上. 以 A 为圆心，充分小的正数 δ 为半径作圆周，记位于 C 内的部分为 l_δ，C 上位于小圆内的部分记为 C_δ，如 4329 题图所示，由 l_δ，C_δ 所围之域记为 S_δ，则根据格林公式有

$$\oint_{C-C_\delta+l_\delta^-}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\mathrm{d}s=\oint_{C-C_\delta+l_\delta^-}P\mathrm{d}\xi+Q\mathrm{d}\eta$$
$$=\iint_{S\setminus S_\delta}\left(\frac{\partial Q}{\partial\xi}-\frac{\partial P}{\partial\eta}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=0,$$

所以
$$\int_{C\setminus C_\delta}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\mathrm{d}s=\int_{l_\delta}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\mathrm{d}s$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_{l_\delta}\mathrm{d}s=\angle B_1AB_2.$$

令 $\delta\to+0$，上式两边取极限得



4329 题图

$$u(x,y)=\oint_C \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\mathrm{d}s=\lim_{\delta\to+0}\angle B_1AB_2=\pi,$$

综上所述,可得

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\oint_C \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\mathrm{d}s\\&=\begin{cases}0, & 点\ A\ 在\ C\ 之外\\ \pi, & 点\ A\ 在\ C\ 上\\ 2\pi, & 点\ A\ 在\ C\ 之内.\end{cases}\end{aligned}$$

【4330】 用极坐标 ρ 和 φ 计算双层对数位:

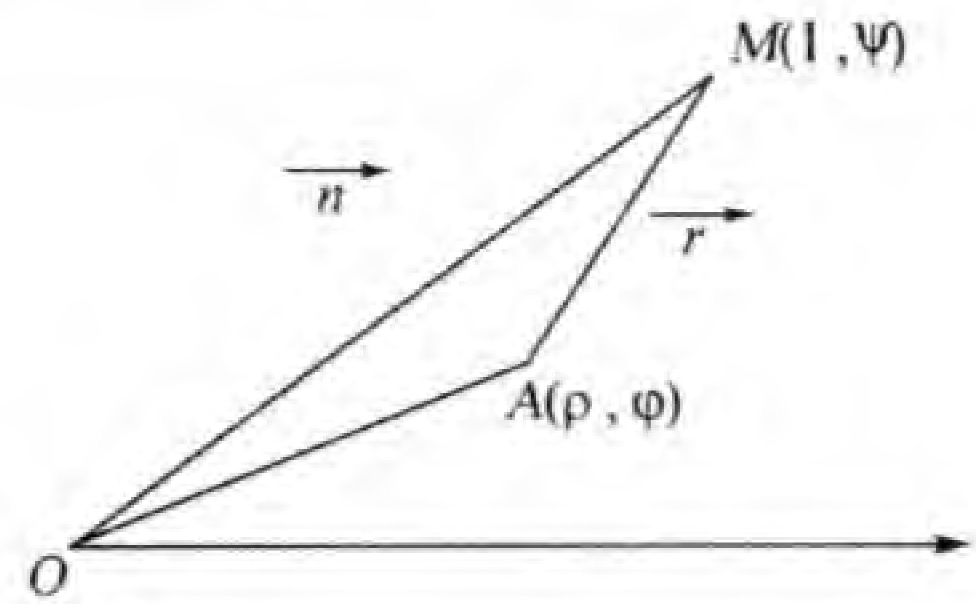
$$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\,\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}\psi,$$

$$K_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\,\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}\psi,$$

其中 r 为点 $A(\rho,\varphi)$ 与动点 $M(1,\psi)$ 之间的距离,$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})$ 为方向 $\boldsymbol{AM}=\boldsymbol{r}$ 和从点 $O(0,0)$ 开始的半径 $\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{n}$ 之间的夹角,m 为自然数.

解 由余弦定理可知

$$\begin{aligned}\cos(\vec{r},\vec{n})&=\frac{1+r^2-\rho^2}{2r}\\&=\frac{1+[1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)]-\rho^2}{2[1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)]^{\frac{1}{2}}}\\&=\frac{1-\rho\cos(\pi-\varphi)}{[1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2]^{\frac{1}{2}}},\end{aligned}$$



4330 题图

故 $$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\,\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}\mathrm{d}\psi.$$

令 $\psi-\varphi=\theta$.

并利用周期性及奇偶性,可得

$$\begin{aligned}K_1&=\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}\cos m(\varphi+\theta)\,\frac{1-\rho\cos\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\mathrm{d}\theta\\&=\cos m\varphi\int_{-\pi}^{\pi}\cos m\theta\,\frac{1-\rho\cos\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\mathrm{d}\theta\\&\quad-\sin\varphi\int_{-\pi}^{\pi}\sin m\theta\,\frac{1-\rho\cos\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\mathrm{d}\theta\\&=2\cos m\varphi\int_0^{\pi}\cos m\theta\,\frac{1-\rho\cos\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

下面讨论三种情况

1° $0\leqslant\rho<1$ 时. 由 2968 题的结果并注意到

$$\int_0^{\pi}\cos m\theta\cdot\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \dfrac{\pi}{2} & n=m,\end{cases}$$

可得 $$\begin{aligned}K_1&=2\cos m\varphi\int_0^{\pi}\cos m\theta\cdot\frac{1-\rho\cos\theta}{1-\rho\cos\theta+\rho^2}\mathrm{d}\theta\\&=2\cos m\varphi\left(\frac{\pi}{2}\rho^m\right)=\pi\rho^m\cos m\varphi.\end{aligned}$$

2° $\rho=1$ 时,则

$$K_1=2\cos m\varphi\int_0^{\pi}\cos m\theta\,\mathrm{d}\theta=0.$$

3° $\rho>1$ 时,设

$$\rho_1 = \frac{1}{\rho}.$$

则 $\qquad 0 < \rho_1 < 1,$

所以 $$K_1 = 2\cos m\varphi\int_0^{\pi}\cos m\theta\,\frac{1-\rho\cos\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\mathrm{d}\theta$$
$$= 2\cos m\varphi\int_0^{\pi}\cos m\theta\,\frac{\rho_1^2-\rho_1\cos\theta}{1-2\rho_1\cos\theta+\rho_1^2}\mathrm{d}\theta$$
$$= 2\cos m\varphi\Big[\int_0^{\pi}\cos m\theta\,\frac{\rho^2-1}{1-2\rho_1\cos\theta+\rho_1^2}\mathrm{d}\theta$$
$$+\int_0^{\pi}\cos m\theta\,\frac{1-\rho_1\cos\theta}{1-2\rho_1\cos\theta+\rho_1^2}\mathrm{d}\theta\Big].$$

利用 2967 题及 2968 题的结果可得

$$\int_0^{\pi}\cos m\theta\,\frac{\rho_1^2-1}{1-2\rho_1\cos\theta+\rho_1^2}\mathrm{d}\theta = -2\rho_1^m\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos m\theta\,\frac{1-\rho_1\cos\theta}{1-2\rho_1\cos\theta+\rho_1^2}\mathrm{d}\theta = \rho_1^m\cdot\frac{\pi}{2},$$

故 $$K_1 = -\pi\rho_1^m\cos m\varphi = -\frac{\pi\cos m\varphi}{\rho^m}.$$

综上所述,可得

$$K_1 = \begin{cases} \pi\rho^m\cos m\varphi, & 0\leqslant\rho<1 \\ 0, & \rho=1 \\ -\dfrac{\pi\cos m\varphi}{\rho^m}, & \rho>1, \end{cases}$$

同理可得

$$K_2 = \begin{cases} \pi\rho^m\sin m\varphi, & 0\leqslant\rho<1 \\ 0, & \rho=1 \\ -\dfrac{\pi\sin m\varphi}{\rho^m}, & \rho>1. \end{cases}$$

【4331】 若 $\Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,则可微分两次的函数 $u = u(x,y)$ 称为调和函数. 证明:当且仅当

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = 0,$$

（其中 C 为任意封闭周线，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿该周线的外法线的方向导数）时，u 是调和函数.

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\vec{n},x),$$

而由 4323 题或 4324 题的推导，可知

$$\cos(\vec{n},x)\mathrm{d}s=\mathrm{d}y,\sin(\vec{n},x)\mathrm{d}s=-\mathrm{d}x,$$

故应用格林公式可得

$$\begin{aligned}\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s&=\oint_C\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\vec{n},x)\right]\mathrm{d}s\\&=\oint_C-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y=\iint_S\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned} \qquad ①$$

其中，S 是 C 所围之域.

下面利①式证明 u 为调和函数，当且仅当$\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$ 对任意封闭曲线 C 成立.

事实上，当 u 为调和函数，则 $\Delta u\equiv 0$，则由①式可得

$$\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\iint_S\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

若对任何封闭曲线 C 都有$\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$ 及设 u 不为调和函数，则存在 $P_0(x_0,y_0)$，使得在该点 $\Delta u\Big|_{p_0}\neq 0$. 不妨设 $\Delta u\Big|_{p_0}=\delta>0$，则由 Δu 的连续性知，存在以 P_0 为圆心，ε 为半径的圆周 C_ε，使得在以 C_ε 为边界的闭圆域 S_ε 内有

$$\Delta u\geqslant\frac{\delta}{2}>0,$$

故将①式应用于 C_ε，有

$$\oint_{C_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\iint_{S_\varepsilon}\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\frac{\delta}{2}\cdot\pi\varepsilon^2>0,$$

这与假设相矛盾，因此，u 为调和函数.

【4332】 证明：

$$\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_S u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s,$$

其中光滑周线 C 围成有界域 S.

证 利用格林公式可得

$$\begin{aligned}\oint_c u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s&=\oint_c u\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\vec{n},x)\right]\mathrm{d}s\\&=\oint_c -u\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+u\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\\&=\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_S u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

故得
$$\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_S u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_c u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s.$$

【4333】 证明：在有界域 S 内及其边界 C 上的调和函数是由其在周线 C 上的值单值确定的(参见题 4332).

证 设 u_1,u_2 是在有界域 S 和它的周界 C 上的调和函数，它们在周界 C 上的取值相同，设 $u=u_1-u_2$，则 u 在 S 及 C 上调和且 $u\Big|_C=0$，所以

$$\oint_C u\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0.$$

由 4332 题的结果有

$$\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

由于 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 都是连续函数，故在 S 上有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

所以在 S 上，$u\equiv$ 常数，而在周界 C 上，$u=0$，故 $u\equiv0$，从而 $u_1=u_2$.

【4334】 证明平面上的格林第二公式：

$$\iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}s,$$

其中光滑周线 C 限制有界域 S，$\frac{\partial}{\partial n}$ 为沿 C 的外法线方向的导数.

证 由格林公式，我们有

$$\oint_C v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = \oint_C v\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin(\vec{n},x)\right]\mathrm{d}s$$

$$= \oint_C -v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

$$= \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_S v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

同样有 $$\oint_C u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_S u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因此 $$\oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}s = \oint_C \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$$

$$= \iint_S v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_S u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【4335】 利用格林第二公式，证明：若 $u = u(x,y)$ 为封闭有界域 S 内的调和函数，则

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\oint_C \left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,$$

其中 C 为域 S 的边界；n 为周线 C 的外法线方向，(x,y) 为域 S 内的点，$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ 为点 (x,y) 与周线 C 上的动点 (ξ,η) 之间的距离.

提示：从域 S 割下 (x,y) 点与其充分小的圆邻域，并把格林第

二公式运用于域 S 的其他余下部分.

证 设

$$v=\ln r=\frac{1}{2}\ln[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2].$$

当 $(\xi,\eta)\neq(x,y)$ 时, v 为调和函数, 事实上

$$\frac{\partial v}{\partial\xi}=\frac{\xi-x}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}=\frac{(\eta-y)^2-(\xi-x)^2}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^2},$$

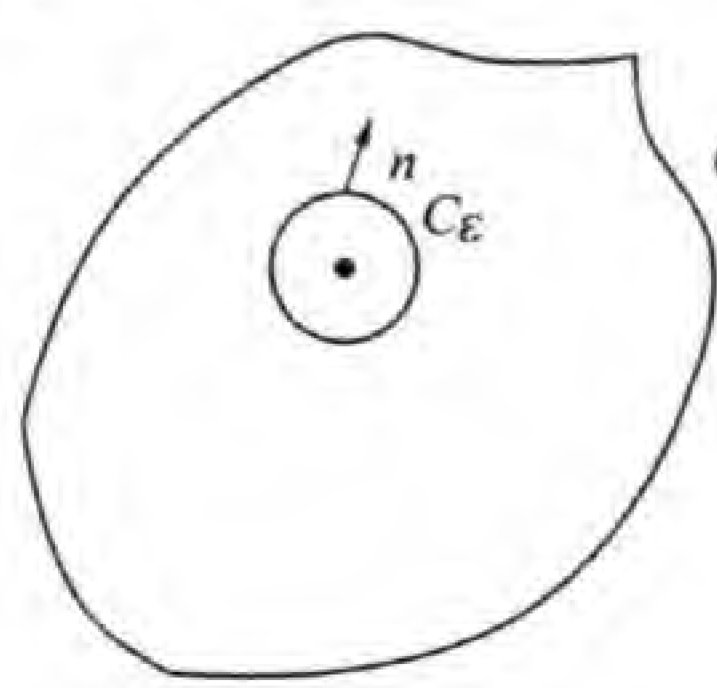
$$\frac{\partial v}{\partial\eta}=\frac{\eta-y}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}=\frac{(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^2},$$

所以 $$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}=0\qquad((\xi,\eta)\neq(x,y)),$$

即 v 为调和函数.

今以点 $M(x,y)$ 为中心, 充分小的正数 ε 为半径, 作圆周 C_ε, C_ε 所围的圆域记为 S_ε, 则在 $S-S_\varepsilon$ 上, u 及 $v=\ln r$ 均为调和函数, 故应用格林第二公式, 有



4335 题图

$$0=\iint\limits_{S-S_\varepsilon}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta\ln r\\ u & \ln r\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{C+C_\varepsilon^-}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial\ln r}{\partial n}\\ u & \ln r\end{vmatrix}\mathrm{d}s$$

$$=\oint_C\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)\mathrm{d}s+\oint_{C_\varepsilon^-}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,$$

其中 C_ε^- 表示沿 C_ε 的负方向，即顺时针方向，所以

$$\oint_C\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial u}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\oint_{C_\varepsilon}\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial u}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,$$

而在 C_ε 上，$\ln r=\ln\varepsilon$，故由 4331 题知

$$\oint_{C_\varepsilon}\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\ln\varepsilon\oint_{C_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s,$$

又在 C_ε 上

$$\frac{\partial \ln r}{\partial n}=\frac{\partial \ln r}{\partial r}\bigg|_{r=\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon},$$

故 $$\oint_{C_\varepsilon}u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\mathrm{d}s=\frac{1}{\varepsilon}\oint_{C_\varepsilon}u\,\mathrm{d}s=\frac{1}{\varepsilon}2\pi\varepsilon u(\xi_1,\eta_1)=2\pi u(\xi_1,\eta_1),$$

其中 $(\xi_1,\eta_1)\in C_\varepsilon$，故得

$$u(\xi_1,\eta_1)=\frac{1}{2\pi}\oint_c\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,$$

令 $\varepsilon\to+0$，并注意到 $u(\xi,\eta)$ 在 (x,y) 的连续性有

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

【4336】 证明对于调和函数 $u(M)=u(x,y)$ 的中值定理：

$$u(M)=\frac{1}{2\pi R}\oint_C u(\xi,\eta)\mathrm{d}s,$$

其中 C 为以点 M 为中心，半径为 R 的圆周.

证 由 4335 题知，对任意包含 M 的闭曲线 C 有

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\oint_c\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,$$

现取 C 为以 M 为中心，R 为半径的圆周则由 4331 题知

$$\oint_c\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\ln R\oint_c\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0,$$

又 $$\oint_c u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\mathrm{d}s=\oint_c u\cdot\frac{\partial \ln r}{\partial r}\bigg|_{r=R}\mathrm{d}s=\frac{1}{R}\oint_c u(\xi,\eta)\mathrm{d}s,$$

因此 $$u(M)=\frac{1}{2\pi R}\oint_c u(\xi,\eta)\mathrm{d}s.$$

【4337】 证明若函数 $u(x,y)$ 在有界封闭域内是调和的，而且在这个域不是常数，则在该域的内点不能达到最大值或最小值(最大值原理).

证 我们只证明最大值的情形，采用反证法，设 $u(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 达到最大值，其中 M_0 为内点. 我们证明 $u(x,y)$ 在调和闭域 $\overline{\Omega}$ 上恒为常数，分三步来证明.

(1) 若圆域

$$S_\varepsilon=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\varepsilon^2\}\subset\Omega,$$

则 $u(x,y)$ 在 S_ε 上恒为常数. 事实上对 C_ρ：

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2\leqslant\varepsilon^2,$$

应用 4336 题的结果有

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}u(x,y)\mathrm{d}s,$$

另一方面 $u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}u(x_0,y_0)\mathrm{d}s$,

故
$$\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}[u(x_0,y_0)-u(x,y)]\mathrm{d}s=0, \qquad ①$$

而 $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取最大值，故

$$u(x_0,y_0)-u(x,y)\geqslant 0,$$

由此，根据 ① 可知在 C_ρ 上

$$u(x_0,y_0)-u(x,y)\equiv 0,$$

事实上，若存在 $(x_1,y_1)\in C_\rho$，使得

$$u(x_0,y_0)-u(x,y)>\frac{a}{2}>0,$$

故
$$\begin{aligned}&\oint_{C_\rho}[u(x_0,y_0)-u(x,y)]\mathrm{d}s\\&\geqslant\int_{C'_\rho}[u(x_0,y_0)-u(x,y)]\mathrm{d}s\\&\geqslant\frac{a}{2}\cdot C'_\rho\text{ 的长度}>0,\end{aligned}$$

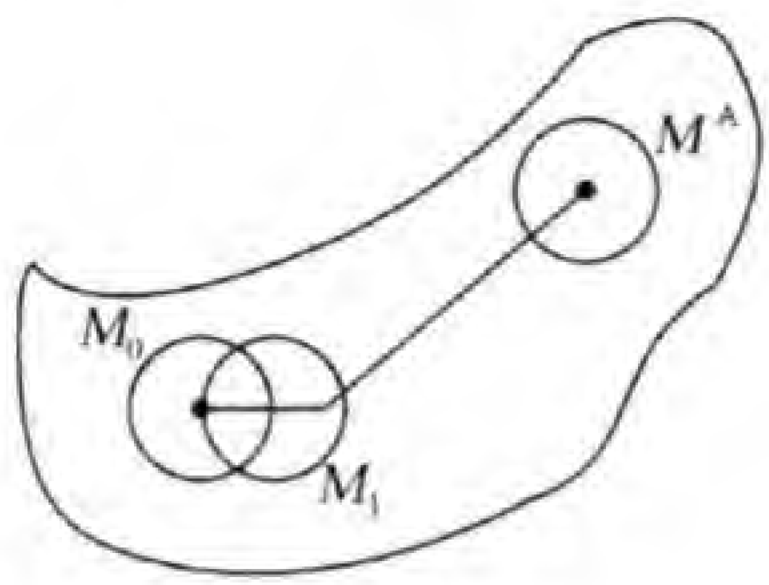
这与 ① 式相矛盾，所以在 C_ρ 上，有

$$u(x,y)=u(x_0,y_0),$$

由 $0<\rho\leqslant\varepsilon$ 的任意性知,在 S_ε 上有

$$u(x,y)\equiv u(x_0,y_0).$$

(2) 设 $M^*(x^*,y^*)\in\Omega$,则必有 $u(x^*,y^*)=u(x_0,y_0)$. 用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 $M_0(x_0,y_0)$ 与 $M^*(x^*,y^*)$ 联接起来.



4337 题图

用 δ 表示 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 与 l 的距离.

取 $0<\delta'<\delta$,以 M_0 为圆心,δ' 为半径作一圆周 C_0,C_0 所围的圆域记 S_0. 即

$$S_0=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\delta'^2\},$$

显然 $S_0\subset\Omega$,由(1)段所证明的结论知在 S_0 上 $u(x,y)$ 为常数,特别 $u(x_1,y_1)=u(x_0,y_0)$,

这里 $M_1(x_1,y_1)$ 是 C_0 与 l 的交点. 又以 $M_1(x_1,y_1)$ 为圆心,δ' 为半径作圆周 C_1,得一圆周

$$S_1=\{(x,y)\mid(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\leqslant\delta'^2\},$$

显然,$S_1\subset\Omega$,且 $u(x,y)$ 在 (x_1,y_1) 取到最大值,故再次应用(1)段的结论,可得当 $(x,y)\in S_1$ 时,

$$u(x,y)=u(x_1,y_1)=u(x_0,y_0),$$

特别地 $u(x_2,y_2)=u(x_0,y_0)$,

这里 $M_2(x_2,y_2)$ 为 C_1 与 l 的交点(除 M_0 外的另一交点),以 $M_2(x_2,y_2)$ 为中心,δ' 为半径得一圆域

$$S_2=\{(x,y)\mid(x-x_2)^2+(y-y_2)^2\leqslant\delta'^2\}\subset\Omega,\cdots$$

依此类推,可得

$$u(x^*,y^*)=u(x_0,y_0),$$

(3) 由(2)段的结论,可知在 Ω 内 $u(x,y)$ 恒为常数,由 $u(x,y)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的连续性可知 $u(x,1,y)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上恒为常数.

【4338】 证明黎曼公式:

$$\iint_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

其中
$$L[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu,$$

$$M[v]=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-a\frac{\partial v}{\partial x}-b\frac{\partial v}{\partial y}+cv,$$

(a,b,c 均为常数),P 和 Q 为某些确定的函数,周线 C 包围有界域 S.

证 因为

$$\begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix}=vL[u]-uM[v]$$

$$=v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+av\frac{\partial u}{\partial x}+bv\frac{\partial u}{\partial y}+cuv$$

$$-u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+au\frac{\partial v}{\partial x}+bu\frac{\partial v}{\partial y}-cuv$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+a\frac{\partial}{\partial x}(vu)+b\frac{\partial}{\partial y}(uv)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+auv\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-buv\right),$$

设 $P=u\dfrac{\partial u}{\partial x}-buv,Q=v\dfrac{\partial u}{\partial y}+auv,$

利用格林公式,即得

$$\iint_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_c P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

【4339】 设 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 为稳定流体流速的分量.确定单位时间内从周线 C 所限制的域 S 内流出的液体的量(亦即液体流出量和流入量的差).若液体是不可压缩的,而且在

域 S 内没有源泉和渗漏，则函数 u 和 v 满足什么样的方程式？

解 设液体的流速为

$$\vec{V}=u(x,y)\vec{i}+v(x,y)\vec{j}.$$

根据假设，液体是不可压缩的，故其密度 $\rho=\rho_0$（常数）所以所求的液体的量为

$$\begin{aligned}Q&=\oint_c\rho_0\vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}s\\&=\oint_c\rho_0[u\cos(\vec{n},x)+v\sin(\vec{n},x)]\mathrm{d}s\\&=\rho_0\oint_c-v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y=\rho_0\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 $\vec{n}$ 表示曲线 C 的外法线上的单位向量，又根据假设，液体在 S 内没有源泉和漏孔，则流出量与流入量的代数和为零，即

$$\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

又显然对于 S 内的任何闭曲线 l，上述结果均正确，即若 l 所围之域 S'，则

$$\iint_{S'}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

由 u,v 的连续性及 l 的任意性，知

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

这就是 u,v 要满足的方程.

【4340】 根据比奥－萨瓦尔定律，通过导线元 $\mathrm{d}s$ 的电流 i 在空间点 $M(x,y,z)$ 形成磁场，其强度：

$$\mathrm{d}H=ki\,\frac{(r\times\mathrm{d}s)}{r^2},$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为连接元素 $\mathrm{d}s$ 与点 M 的向量，k 为比例系数. 对于封闭导线 C 的情况，求解磁场强度 H 在点 M 的投影 H_x,H_y,H_z.

解 设导线 C 上的动点为 (ξ,η,ζ)，则

$$\vec{r}=(\xi-x)\vec{i}+(\eta-y)\vec{j}+(\zeta-z)\vec{k},$$

$$d\vec{s} = d\xi\vec{i} + d\eta\vec{j} + d\zeta\vec{k},$$

于是,磁场强度为

$$\vec{H} = ki\oint_c \frac{1}{r^3}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ d\xi & d\eta & d\zeta \end{vmatrix},$$

故得 $$H_x = ki\oint_c \frac{1}{r^3}[(\eta - y)d\zeta - (\zeta - z)d\eta],$$

$$H_y = ki\oint_c \frac{1}{r^3}[(\zeta - z)d\xi - (\xi - x)dz],$$

$$H_z = ki\oint_c \frac{1}{r^3}[(\xi - x)d\eta - (\eta - y)d\xi].$$

§14. 曲面积分

1. **第一类曲面积分** 若 S 为逐片光滑的双面曲面:

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), ((u,v) \in \Omega). \qquad ①$$

$f(x,y,z)$ 是在曲面 S 的各点上有定义的连续函数,则

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_\Omega f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\,dudv, \qquad ②$$

其中 $$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

在特殊情况下,若曲面 S 方程式具有以下形式:

$$z = z(x,y) \qquad ((x,y) \in \sigma).$$

其中 $z(x,y)$ 为单值连续可微分函数,则

$$\iint_S f(x,y,z)dS$$

$$= \iint_{\sigma} f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

这个积分与曲面 S 的侧选择无关.

若把函数 $f(x,y,z)$ 看作是曲面 S 在点(x,y,z) 的密度,则积分 ② 就是这个曲面的质量.

2. **第二类曲面积分** 若 S 为光滑的双面曲面:S^+ 为其正面即由其法线方向 $\boldsymbol{h}$"$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$"所确定的一面;$P=P(x,y,z)$,$Q=Q(x,y,z)$,$R=R(x,y,z)$ 均为三个在曲面 S 上有定义的连续的函数,则

$$\iint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$$
$$= \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS. \quad ③$$

若曲面 S 以参数形式 ① 给出,则法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦按照下式确定:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

式中 $A=\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, B=\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, C=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$,

并且用适当的方式选择根号前的符号.

当转换到曲面 S 的另一侧面 S^- 时,把积分 ③ 的符号改成相反符号即可.

【4341】 下列曲面积分彼此相差多少?

$$I_1 = \iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS,$$

和

$$I_2 = \iint_P (x^2+y^2+z^2)\,dP,$$

其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$,P 为内接于此球的八面体 $|x|+$

$|y|+|z|=a$.

解 利用球面的参数方程

$$x=a\cos\varphi\cos\psi, y=a\sin\varphi\cos\psi, z=a\sin\psi$$

$$\left(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, -\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=a^2\cos^2\psi,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2=a^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\psi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\psi}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}=0,$$

从而 $\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\psi=a^2\cos\psi$.

所以 $I_1=\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{2\pi}a^2\cdot a^2\cos\psi\mathrm{d}\varphi$

$$=4\pi a^4.$$

P 在第一卦限内的部分上有

$$z=a-x-y,$$

从而 $\mathrm{d}P=\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

利用对称性可得

$$\begin{aligned}I_2&=\iint\limits_P(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}P\\&=8\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}[x^2+y^2+(a-x-y)^2]\mathrm{d}y\\&=16\sqrt{3}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\left[x^2+y^2+xy+\frac{a^2}{2}-a(x+y)\right]\mathrm{d}y\\&=16\sqrt{3}\int_0^a\left[x^2(a-x)-\frac{1}{6}(a-x)^3-ax(a-x)\right.\\&\qquad\left.+\frac{a^2}{2}(a-x)\right]\mathrm{d}x\\&=2\sqrt{3}a^4.\end{aligned}$$

所以,两积分之差为

$$I_1 - I_2 = 2(2\pi - \sqrt{3})a^4.$$

【4342】 计算积分$\iint\limits_S z\mathrm{d}S$,其中$S$为曲面$x^2+z^2=2az$被曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$割下的部分($a>0$).

解 作变量

$$x = ar\sin\theta, y = y, z = a + ar\cos\theta.$$

则曲面S的方程变为$r=1$,即S的参数方程为

$$x = a\sin\theta, y = y, z = a + a\cos\theta,$$

所以 $$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = a^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

即 $$\mathrm{d}s = \sqrt{EG - F^2} = a\mathrm{d}\theta\mathrm{d}y.$$

而曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$变为

$$y^2 = 2a^2\cos\theta(1+\cos\theta),$$

所以,两曲面交线的参数方程为

$$x = a\sin\theta, y = \pm\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)},$$

$$z = a + a\cos\theta \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

所以 $$\iint\limits_S z\mathrm{d}S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{-\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}(a+a\cos\theta)a\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2}a^3\sqrt{\cos\theta}\cdot\sqrt{(1+\cos\theta)^3}\mathrm{d}\theta$$

$$= -4\sqrt{2}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos\theta}\sqrt{(1+\cos\theta^3_\pi)}}{\sin\theta}\mathrm{d}(\cos\theta)$$

$$= -4\sqrt{2}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos\theta}(1+\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos\theta}}\mathrm{d}(\cos\theta)$$

(令$\cos\theta = t$)

$$= 4\sqrt{2}a^3\int_0^1 [t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}]dt$$

$$= 4\sqrt{2}a^3\left[B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)+B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 4\sqrt{2}a^3\left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)}+\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}\right]$$

$$= \frac{7}{2}\sqrt{2}\pi a^3.$$

计算下列第一类曲面积分(4343 ～ 4350).

【4343】 $\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S$,其中 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$,$z\geqslant 0$.

解 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

故有

$$\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S$$

$$=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}[x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}]\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}a\mathrm{d}y+a\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{x+y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y$$

$$=\pi a^2\cdot a+a\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{x+y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y.$$

由对称性知

$$\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{x+y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y=0,$$

故 $$\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S = \pi a^3.$$

【4344】 $\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$,其中 S 为立体 $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1$ 的边界.

解 曲面 S 可分为两部分:

一部分为 S_1:

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (0 \leqslant z \leqslant 1),$$

另一部分 S_2 为平面 $z=1$ 上 $x^2+y^2=1$ 的内部,S_1,S_2 在 xOy 平面上的投影域都是 $x^2+y^2 \leqslant 1$.

在 S_1 上

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

在 S_2 上

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以
$$\begin{aligned}\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S &= \iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S + \iint_{S_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S \\ &= (\sqrt{2}+1)\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= (\sqrt{2}+1)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2 \cdot r\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{2}+1}{2}\pi.\end{aligned}$$

【4345】 $\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$,其中 S 为四面体 $x+y+z \leqslant 1$,$x \geqslant 0$,$y \geqslant 0$,$z \geqslant 0$ 的边界.

解 曲面 S 由四部分组成

$$S_1: z=0, x \geqslant 0, y \leqslant 0, x+y \leqslant 1, \mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$S_2: x=0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, y+z \leqslant 1, \mathrm{d}S = \mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$S_3: y=0, x \geqslant 0, z \geqslant 0, x+z \leqslant 1, \mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

$$S_4: x+y+z=1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, \mathrm{d}S = \sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以 $$\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$$

$$= (1+\sqrt{3})\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} \frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}$$

$$+\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{1-y} \frac{\mathrm{d}z}{(1+y)^2}+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} \frac{\mathrm{d}z}{(1+x)^2}$$

$$= (\sqrt{3}+1)\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)+2(1-\ln 2)$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2.$$

【4346】 $\iint\limits_S |xyz|\,\mathrm{d}S$,其中 S 为曲面 $z=x^2+y^2$ 用平面 $z=1$ 割下的部分.

解 设 S_1 为曲面在第一卦限的部分,由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}.$$

S_1 在 xOy 平面上的投影域为:$x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant 1$ 利用对称性及极坐标可得

$$\iint\limits_S |xyz|\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} xyz\,\mathrm{d}S$$

$$= 4\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ x^2+y^2\leqslant 1}} xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^4\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{1+4r^2}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^5\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}r \qquad (令\ r^2=t)$$

$$= \int_0^1 t^2\sqrt{1+4t}\,\mathrm{d}t \qquad (令\sqrt{1+4t}=u)$$

$$= \int_0^{\sqrt{5}} \frac{1}{32}(u^2-1)^2u^2\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{u^7}{7}-\frac{2u^5}{5}+\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}} = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

【4347】 $\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{h}$,其中 S 为椭球面,h 为椭球中心到椭球曲面元素 $\mathrm{d}S$ 的切面的距离.

解 设椭球面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

对于椭球面上任一点 $P(x,y,z)$,容易求得椭球面在点 $P(x,y,z)$ 的切平 面方程为

$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2}=1,$$

其中(ξ,η,ζ) 为切平面上点的流动坐标,椭球中心(坐标原点) 到上述平面的距离为

$$h=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

利用广义球坐标

$$x=ar\sin\theta\cos\varphi, y=br\sin\theta\sin\varphi, z=cr\cos\theta.$$

则椭球面方程为 $r=1$,即椭球面的参数方程为

$$x=a\sin\theta\cos\varphi, y=b\sin\theta\sin\varphi, z=c\cos\theta,$$

于是可得

$$\frac{1}{h}=\sqrt{\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}},$$

又
$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2$$
$$=a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi+b^2\cos^2\theta\cos^2\varphi+c^2\sin^2\theta,$$
$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2$$
$$=a^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+b^2\sin^2\theta\cos^2\varphi,$$
$$F=\frac{\partial x}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}$$
$$=(b^2-a^2)\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$= \sqrt{a^2b^2\sin^2\theta\cos^2\theta + a^2c^2\sin^4\theta\sin^2\varphi + b^2c^2\sin^4\theta\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$= abc\sin\theta\sqrt{\frac{\sin^2\theta\cos\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$(0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi),$$

因此

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{h} = abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\theta\left[\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}\right]\mathrm{d}\varphi$$
$$= 8abc\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right.$$
$$\left.+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{b^2}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{c^2}\sin\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\right]$$
$$= 8abc\left[\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{b^2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$
$$= \frac{4\pi abc}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

【4348】 $\iint\limits_S z\mathrm{d}S$，其中 S 为螺旋面 $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v$ $(0 < u < a; 0 < v < 2\pi)$ 的部分曲面.

解 $E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$
$= \cos^2 v + \sin^2 v = 1$,
$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$
$= u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = u^2 + 1$,
$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$
$= -u\sin v\cos v + u\cos v\sin v = 0$,

故 $\mathrm{d}S = \sqrt{u^2+1}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,

因此 $\iint\limits_S z\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} v\mathrm{d}v\int_0^a \sqrt{u^2+1}\,\mathrm{d}u$,

$$= 2\pi^2\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]\Big|_0^a$$

$$= \pi^2\left[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})\right].$$

【4349】 $\iint\limits_S z^2 dS$，其中 S 为锥面 $x = r\cos\varphi\sin\alpha, y = r\sin\varphi\sin\alpha, z = r\cos\alpha(0 \leqslant r \leqslant a, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ 的部分曲面，a 为常数 $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

解　因为

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2$$

$$= \cos^2\varphi\sin^2\alpha + \sin^2\varphi\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$= r^2\cos^2\varphi\sin^2\alpha + r^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha = r^2\sin^2\alpha,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

$$= (\cos\varphi\sin\alpha)(-r\sin\varphi\sin\alpha) + \sin\varphi\sin\alpha(r\cos\varphi\sin\alpha)$$

$$= 0,$$

故得　$dS = \sqrt{EG - F^2}\,drd\varphi = r\sin\alpha\, drd\varphi,$

所以　$\iint\limits_S z^2 dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\cos^2\alpha \cdot r\sin\alpha\, dr = \frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha.$

【4350】 $\iint\limits_S (xy + yz + zx) dS$，其中 S 为圆锥曲面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 割下的部分.

解　在圆锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 上

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy = \sqrt{2}\,dxdy,$$

又曲面 S 在 xOy 平面上的投影域为

$x^2+y^2\leqslant 2ax.$

利用极坐标可得

$$\iint\limits_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2ax}(xy+y\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}[r^2\cos\varphi\sin\varphi+r^2(\sin\varphi+\cos\varphi)]r\mathrm{d}r$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4(\cos\varphi\sin\varphi+\sin\varphi+\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{64\sqrt{2}a^4}{15}.$$

【4351】 证明泊松公式:

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\mathrm{d}u,$$

其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的表面.

证 取新坐标系 $Ouvw$,其中原点不变,平面 $ax+by+cz=0$ 即为 Ovw 平面,u 轴垂直于该平面,则有

$$u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

所以 $$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=\iint\limits_S f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\mathrm{d}S,$$

显然,球面 S 的方程为

$$u^2+v^2+w^2=1,$$

或 $$v^2+w^2=(\sqrt{1-u^2})^2,$$

改写为参数方程为

$$u=u,v=\sqrt{1-u^2}\cos\varphi,$$

$$w=\sqrt{1-u^2}\sin\varphi \qquad (-1\leqslant u\leqslant 1,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi),$$

$$E=\left(\frac{\partial u}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{u^2}{1-u^2}\cos^2\varphi + \frac{u^2}{1-u^2}\sin^2\varphi = \frac{1}{1-u^2},$$

$$G = \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$= (1-u^2)\sin^2\varphi + (1-u^2)\cos^2\varphi = 1-u^2,$$

$$F = \frac{\partial u}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

$$= 0 + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\cos\varphi\cdot\sqrt{1-u^2}\cdot\sin\varphi$$

$$- \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\sin\varphi\cdot\sqrt{1-u^2}\cos\varphi$$

$$= 0,$$

故 $$dS = \sqrt{EG-F^2}\,du\,d\omega$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1-u^2}\cdot(1-u^2)-0}\,du\,d\omega = du\,d\omega,$$

因此 $$\iint_S f(ax+by+cz)\,dS$$

$$= \iint_S f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,dS$$

$$= \int_0^{2\pi} d\omega \int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,du$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,du.$$

【4352】 求抛物面的质量：

$$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \qquad (0 \leqslant z \leqslant 1),$$

其密度按照 $\rho = z$ 的规律变化.

解 质量

$$M = \iint_S \rho\,dS = \iint_S z\,dS,$$

在 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 上,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

$$= \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy.$$

S 在 xOy 平面上的投影域为 $x^2 + y^2 \leqslant 2$，由此得

$$M = \iint_S z\,dS = \iint_{x^2+y^2\leqslant 2} \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cdot \sqrt{1 + r^2} \cdot r\,dr$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} r^2(1 + r^2)\frac{r\,dr}{\sqrt{1 + r^2}},$$

设 $\sqrt{1 + r^2} = u.$

则 $$\frac{r\,dr}{\sqrt{1 + r^2}} = du, r^2 = u^2 - 1,$$

故得 $$M = \pi \int_1^{\sqrt{3}} (u^2 - 1)u^2\,du = \pi\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\pi(1 + 6\sqrt{3})}{15}.$$

【4352.1】 求半球的质量：$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geqslant 0)$，在其每一个点 $M(x, y, z)$ 处的密度等于 $\frac{z}{a}$.

解 质量

$$M = \iint_S \rho\,dS = \iint_S \frac{z}{a}\,dS,$$

而在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geqslant 0)$ 上

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$= \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{z}\right) + \left(-\frac{y}{z}\right)^2}\,dx\,dy = \frac{a}{z}\,dx\,dy,$$

而球面在 xOy 平面上的投影域为圆域

$$x^2 + y^2 \leqslant a^2,$$

所以 $$M=\iint\limits_{S}\frac{z}{a}\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\frac{z}{a}\cdot\frac{a}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^2.$$

【4352.2】 求均质三角板 $x+y+z=a(x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0)$ 对坐标平面的转动慢量.

解 对 xOy 平面的静矩为

$$I_{xy}=\iint\limits_{S}z\mathrm{d}S.$$

由于在平面 $x+y+z=a$ 上

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而 S 在 xOy 平面上的投影域为：$x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant a$，故

$$I_{xy}=\iint\limits_{S}z\mathrm{d}S=\sqrt{3}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(a-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{3}\int_0^a\left[(a-x)y-\frac{1}{2}y^2\right]\Bigg|_0^{a-x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^a(a-x)^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}a^3}{6}.$$

由对称性可知

$$I_{xy}=I_{xz}=I_{yz}=\frac{\sqrt{3}a^3}{6}.$$

【4353】 计算密度为 ρ_0 的均质球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$，对 Oz 轴的转动惯量.

解 对 Oz 轴的转动惯量为

$$I_z=\rho_0\iint\limits_{S}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

$$=\rho_0\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\frac{a\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$=a\rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\frac{r^3\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2-r^2}}=2\pi\rho_0 a\int_0^a r^2\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2-r^2}},$$

令 $\sqrt{a^2-r^2}=u$.

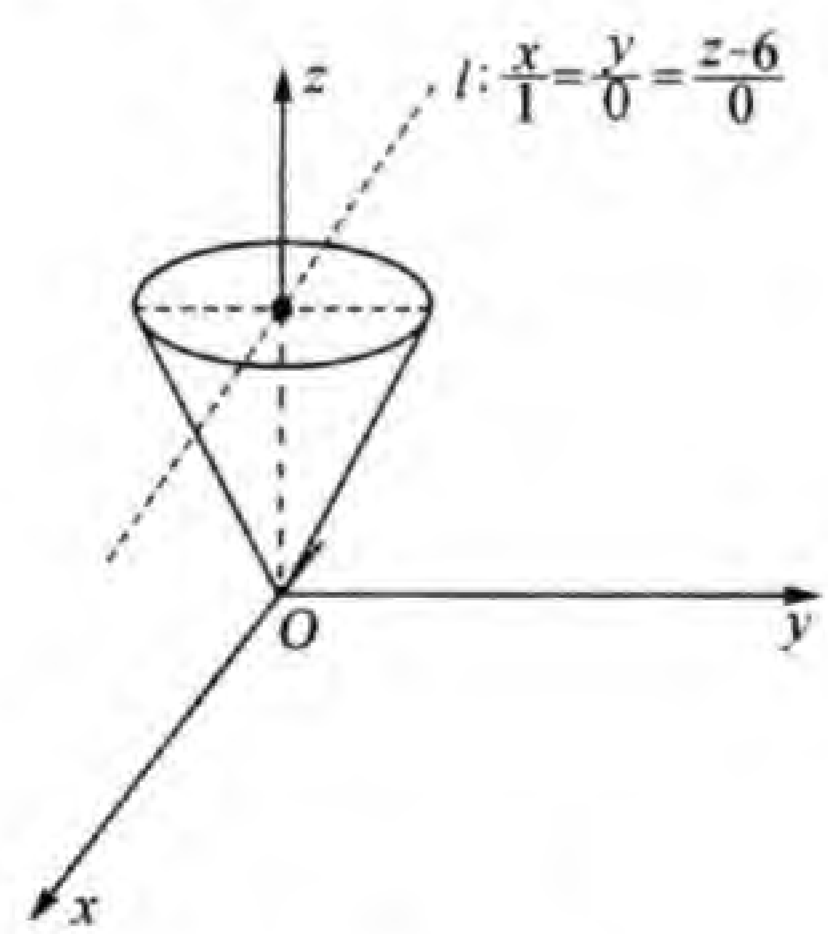
则 $$-\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2-r^2}}=\mathrm{d}u, r^2=a^2-u^2,$$

因此 $$I_z=2\pi\rho_0 a\int_0^a r^2\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2-r^2}}=2\pi\rho_0 a\int_0^a(a^2-u^2)\mathrm{d}u$$
$$=2\pi\rho_0 a\left[a^2u-\frac{1}{3}u^3\right]\Big|_0^a=\frac{4\pi\rho_0 a^4}{3}=\frac{Ma^2}{3},$$

其中 M 是球壳的质量.

【4354】 计算密度为 ρ_0 的均质锥壳 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0\ (0\leqslant z\leqslant b)$ 对直线 $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}$ 的转动惯量.

解 空间中任一点 $M(x,y,z)$ 到 Ox 轴的距离平方为 y^2+z^2,因此点 M 到直线 $l:\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}$ 的距离平方为 $y^2+(z-b)^2$. 如是,所求转动惯量为



4354 题图

$$I=\rho_0\iint_S[y^2+(z-b)^2]\mathrm{d}S.$$

在圆锥 $S:z=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ 上,

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}\,dxdy$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy.$$

S 在 xOy 平面上的投影域为 $x^2+y^2\leqslant a^2$，故

$$I=\rho_0\iint_S[y^2+(z-b)^2]dS$$

$$=\rho_0\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left[y^2+\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2\right]\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy$$

$$=\rho_0\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\left[r^2\sin^2\varphi+\left(\frac{b}{a}r-b\right)^2\right]rdr$$

$$=\frac{\rho_0\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left[\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\int_0^a r^3dr+\frac{b^2}{a^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a(r-a)^2rdr\right]$$

$$=\frac{\rho_0\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left[\frac{\pi a^4}{4}+2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^4}{4}-\frac{2a^4}{3}+\frac{a^4}{2}\right)\right]$$

$$=\pi\rho_0a\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{6}\right).$$

【4355】 求均质曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=ax$ 割下部分的重心的坐标.

解 质量为

$$M=\iint_S\rho_0dS=\sqrt{2}\rho_0\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}dxdy$$

$$=\sqrt{2}\rho_0\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi=\frac{\sqrt{2}\pi a^2\rho_0}{4},$$

重心坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\cdot\iint_S x\rho_0dS=\frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}xdxdy$$

$$= \frac{1}{M} \cdot \sqrt{2}\rho_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2 \cos\varphi dr$$

$$= \frac{1}{M} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}\rho_0 a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{M} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}\rho_0 a^3 \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 d\varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{M} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \rho_0 a^3 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}\pi a^2 \rho_0} \cdot \frac{\sqrt{2}\pi\rho_0 a^3}{8} = \frac{a}{2},$$

$$y_0 = \frac{1}{M}\iint_S \rho_0 y dS = \frac{1}{M}\sqrt{2}\rho_0 \iint_{x^2+y^2\leqslant ax} y dx dy$$

$$= \frac{1}{M}\sqrt{2}\rho_0 \int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} y dy = 0,$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\rho_0 \iint_S z dS = \frac{1}{M} \cdot \sqrt{2}\rho_0 \iint_{x^2+y^2\leqslant ax} \sqrt{x^2+y^2} dx dy$$

$$= \frac{1}{M} \cdot \sqrt{2}\rho_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2 dr$$

$$= \frac{1}{M}\sqrt{2}\rho_0 \cdot \frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}\pi a^2 \rho_0} \cdot \frac{4\sqrt{2}\rho_0 a^3}{9} = \frac{16a}{9\pi}.$$

【4356】 求均质曲面

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \qquad (x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant a).$$

重心的坐标.

解 由 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$,

得 $$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以,曲面的质量为

$$M = \iint_S \rho_0 \mathrm{d}S = \rho_0 a \iint\limits_{\substack{x \geqslant 0, y \geqslant 0 \\ x+y \leqslant a}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= \rho_0 a \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{a-x} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= \rho_0 a \int_0^a \arcsin \frac{a-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}x$$

$$= \rho_0 a \left[x\arcsin \frac{a-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \bigg|_0^a + a \int_0^a \frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{\sqrt{2(a-x)}(a+x)} \right]$$

$$= \frac{\rho_0 a^2}{\sqrt{2}} \int_0^a \frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{\sqrt{a-x}(a+x)},$$

作变换 $x = a\sin^2 t$,

则有 $$M = \frac{\rho_0 a^2}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a} \cdot \sin t \cdot 2a\sin t\cos t\mathrm{d}t}{\sqrt{a} \cdot \cos t \cdot a(1 + \sin^2 t)}$$

$$= \sqrt{2}\rho_0 a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1 + \sin^2 t} \mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2}\rho_0 a^2 \left[\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \sin^2 t} \right],$$

再作变换 $u = \tan t$,

则有 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \sin^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{2 + \tan^2 t} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2 + u^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} \bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

故 $$M = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \pi a^2 \rho_0,$$

重心坐标

$$x_0=\frac{1}{M}\iint_S\rho_0 x\mathrm{d}S=\frac{1}{M}\rho_0\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\x+y\leqslant a}}\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{M}\rho_0 a\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{a-y}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{M}\rho_0 a\int_0^a\left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\Big|_{x=0}^{x=a-y}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\rho_0 a\left[\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\mathrm{d}y-\int_0^a\sqrt{2ay-2y^2}\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{1}{M}\rho_0 a\left[\frac{\pi a^2}{4}-\int_0^a\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(y-\frac{a}{2}\right)^2}\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{2}{(\sqrt{2}-1)\pi a^2\rho_0}\cdot\rho_0 a\left[\frac{\pi a^2}{4}-\frac{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

由对称性知

$$y_0=x_0=\frac{a}{2\sqrt{2}},$$

$$z_0=\frac{1}{M}\iint_S\rho_0 z\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\rho_0\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\x+y\leqslant a}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\rho_0 a\cdot\frac{1}{2}a^2=\frac{2}{(\sqrt{2}-1)\pi\rho_0 a^2}\cdot\frac{1}{2}\rho_0 a^3$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+1)a}{\pi}.$$

【4356.1】 求以下曲面 S 的极惯性力矩：

$$I_0=\iint_S(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S,$$

(1) 最大立方体曲面 $\{|x|,|y|,|z|\}=a$；

(2) 柱面的总曲面 $x^2+y^2\leqslant R^2$;$0\leqslant z\leqslant H$.

解 (1) 在平面 $z=a(-a\leqslant x\leqslant a,-a\leqslant y\leqslant a)$ 上

$$dS=dxdy.$$

由对称性知

$$\begin{aligned}I_0&=\iint_S(x^2+y^2+z^2)dS\\&=6\int_{-a}^{a}dx\int_{-a}^{a}(x^2+y^2+z^2)dy\\&=6\times\frac{20}{3}a^4=40a^4.\end{aligned}$$

(2) 曲面 S 由三部分组成.其中

$$S_1:x^2+y^2=R^2\qquad(0\leqslant z\leqslant h),$$
$$S_2:z=0\qquad(x^2+y^2\leqslant R^2),$$
$$S_3:z=h\qquad(x^2+y^2\leqslant R^2).$$

S_1 在 yOz 平面上的投影域为

$$-R\leqslant y\leqslant R,0\leqslant z\leqslant h,$$

在 S_1 上 $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz$

$$\begin{aligned}&=\sqrt{1+\left(-\frac{y}{x}\right)^2}dydz=\frac{R}{x}dydz\\&=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz\qquad(x\geqslant 0).\end{aligned}$$

在 S_2 及 S_3 上

$$dS=dxdy.$$

由对称性知

$$\begin{aligned}&\iint_{S_1}(x^2+y^2+z^2)dS\\&=2\int_{-R}^{R}dy\int_0^h(R^2+z^2)\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dz\end{aligned}$$

$$= 2 \cdot R \cdot \left(R^2 h + \frac{1}{3}h^3\right)\int_{-R}^{R} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}}$$

$$= 4\left(R^3 h + \frac{1}{3}Rh^3\right)\int_0^R \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}}$$

$$= 4\left(R^3 h + \frac{1}{3}Rh^3\right)\cdot \arcsin \frac{y}{R}\Big|_0^R$$

$$= \frac{2\pi Rh(3R^2 + h^2)}{3},$$

$$\iint_{S_2}(x^2 + y^2 + z^2)dS = \iint_{x^2+y^2\leqslant R}(x^2 + y^2)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4}R^4 = \frac{\pi}{2}R^4,$$

$$\iint_{S_3}(x^2 + y^2 + z^2)dS = \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}(x^2 + y^2 + h^2)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (r^2 + h^2) r dr = 2\pi\left(\frac{1}{4}R^4 + \frac{1}{2}R^2h^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}R^4 + \pi R^2 h^2,$$

故
$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z_2)dS$$

$$= \frac{2\pi Rh(3R^2 + h^2)}{3} + \frac{\pi}{2}R^4 + \frac{\pi}{2}R^4 + \pi R^2 h^2$$

$$= \frac{2\pi Rh(3R^2 + h^2)}{3} + \pi R^4 + \pi R^2 h^2.$$

【4356.2】 求三角板 $x+y+z=1$ $(x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$ 对坐标平面的转动惯量.

解 这是 4352.2 题当 $a=1$ 时的情形,所以

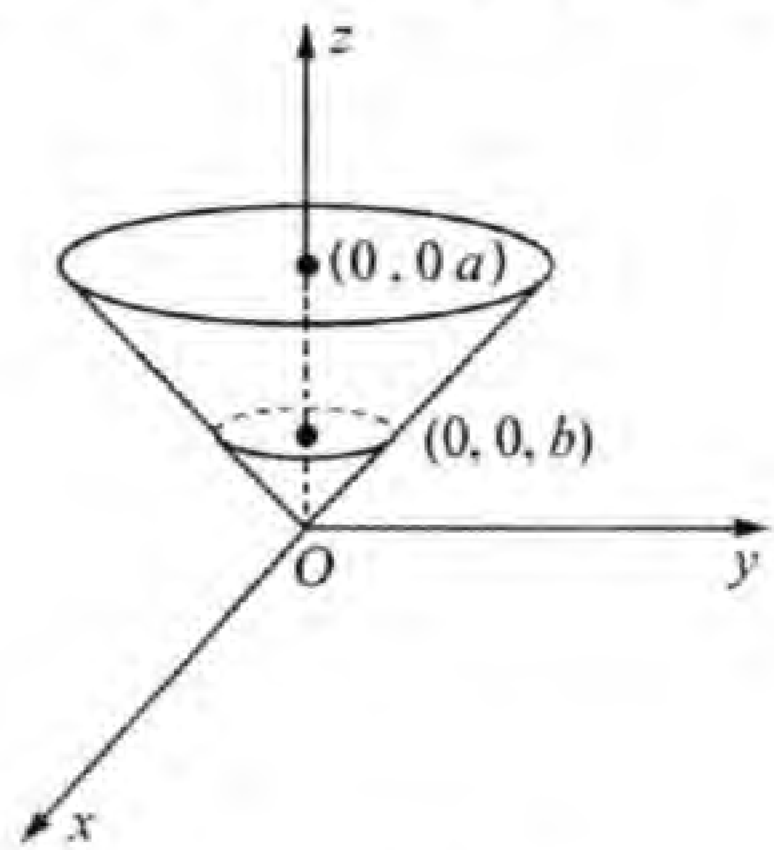
$$I_{xy} = I_{zx} = I_{yz} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

【4357】 密度为 ρ_0 的均质锥截面 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z =$

r $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 < b \leqslant r \leqslant a)$ 以多大力吸引位于该面顶点的质量为 m 的质点?

解 设引力为 $\vec{F}$.

由对称性显然,$\vec{F}$ 在 Ox 轴,Oy 轴上的投影为



4357 题图

$$F_x = F_y = 0,$$

又 $$\mathrm{d}F_z = k\frac{m\rho_0 \mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}\cos\theta,$$

其中,k 为引力常数,θ 为锥面上的点 $M(x,y,z)$ 的矢径 $\overrightarrow{OM}$ 与 Oz 轴的夹角,由于锥面方程为 $z=r$,故 $\theta=\frac{\pi}{4}$. 又在锥面上

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

S 在 xOy 平面上的投影域为

$$b^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant a^2,$$

故 $$\begin{aligned} F_z &= \frac{\sqrt{2}}{2}km\rho_0\iint_S \frac{\mathrm{d}s}{x^2+y^2+z^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}km\rho_0 \iint\limits_{b^2\leqslant x^2+y^2\leqslant a^2} \frac{\sqrt{2}}{2(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}km\rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_b^a \frac{1}{r}\mathrm{d}r = \pi km\rho_0 \ln\frac{a}{b}. \end{aligned}$$

【4358】 求密度为 ρ_0 的均质球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(S)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的位势，亦即计算积分

$$u=\iint\limits_{S}\frac{\rho_0\mathrm{d}S}{r},$$

其中 $$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

解 记

$$r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$$

根据对称性知在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的位，等于在点 $N_0(0,0,r_0)$ 的位.

利用球面的参数方程.

$$x=a\cos\varphi\sin\psi,y=a\sin\varphi\sin\psi,z=a\cos\psi$$
$$(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant\psi\leqslant\pi).$$

则 $$\mathrm{d}S=a^2\sin\psi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\psi,$$

由余弦定理知，球面上任意一点 $M(x,y,z)$ 到点 N_0 的距离

$$r=\sqrt{a^2+r_0^2-2r_0a\cos\psi}\qquad(0\leqslant\psi\leqslant\pi),$$

因此，所求位为

$$\begin{aligned}u&=\iint\limits_{S}\frac{\rho_0\mathrm{d}S}{r}=a^2\rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\frac{\sin\psi\mathrm{d}\psi}{\sqrt{a^2+r_0^2-2r_0a\cos\psi}}\\&=2\pi a^2\rho_0\int_0^{\pi}\frac{\sin\psi\mathrm{d}\psi}{\sqrt{a^2+r_0^2-2r_0a\cos\psi}}\\&=2\pi a^2\rho_0\left[\frac{1}{ar_0}\sqrt{a^2+r_0^2-2r_0a\cos\psi}\right]\Big|_0^{\pi}\\&=\frac{2\pi\rho_0a}{r_0}[a+r_0-|a-r_0|]=4\pi\rho_0\min\left(a,\frac{a^2}{r_0}\right).\end{aligned}$$

【4359】 计算：

$$F(t)=\iint\limits_{x+y+z=t}f(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

其中 $$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & 若\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\0, & 若\ x^2+y^2+z^2>1\end{cases},$$

作出函数 $u=F(t)$ 的图形.

解 根据假设，当 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 时，$f(x,y,z)\neq 0$，而当 $x^2+y^2+z^2>1$ 时 $f(x,y,z)=0$. 因此，需要求当 t 取何值时，平面 $x+y+z=t$ 与球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 有相交部分. 以 $z=t-x-y$ 代入 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 得

$$x^2+y^2+(t-x-y)^2\leqslant 1,$$

$$x^2+y^2+xy-tx-ty\leqslant \frac{1}{2}(1-t^2),$$

$$x^2+x(y-t)+\frac{1}{4}(y-t)^2+y^2-ty-\frac{1}{4}(y-t)^2\leqslant \frac{1}{2}(1-t^2),$$

即 $$\left(x-\frac{y-t}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(y-\frac{t}{3}\right)^2\leqslant \frac{1}{2}\left(1-\frac{t^2}{3}\right), \qquad ①$$

故当 $|t|\leqslant\sqrt{3}$ 时，平面 $x+y+z=t$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相交，而当 $|t|>\sqrt{3}$ 时，它们不相交. 分两种情况讨论.

① 当 $|t|>\sqrt{3}$ 时，由于

$$f(x,y,z)=0,$$

故

$$F(t)=\iint\limits_{x+y+z=t} f(x,y,z)\mathrm{d}S=0.$$

② 当 $|t|\leqslant\sqrt{3}$ 时，这时在积分平面 S 上有.

$$f(x,y,z)=1-x^2-y^2-z^2,$$

而在平面 $S: x+y+z=t$ 上

$$\mathrm{d}S=\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由此得 $$F(t)=\sqrt{3}\iint\limits_{D}[1-x^2-y^2-(t-x-y)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 为 xOy 平面上由 ① 式所决定的区域作变换

$$u=x+\frac{y-t}{2}, v=\frac{\sqrt{3}}{2}(y-t),$$

则区域 D 化为：

$$u^2+v^2\leqslant a^2,$$

其中 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{t^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$,

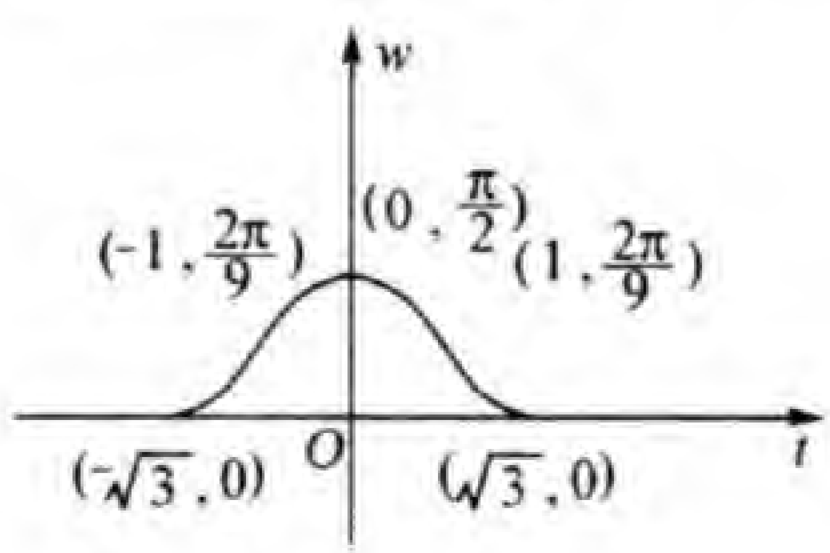
又 $$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

故 $$|I|=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

因此 $$\begin{aligned}F(t)&=\sqrt{3}\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant a^2}2(a^2-u^2-v^2)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=4\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant a^2}(a^2-u^2-v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a(a^2-r^2)r\mathrm{d}r=2\pi a^4=\frac{\pi(3-t^2)^2}{18},\end{aligned}$$

因此 $$F(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2 & 当\ |t|\leqslant\sqrt{3}\\ 0 & 当\ |t|>\sqrt{3}\end{cases},$$

作 $F(t)$ 的图形如 4359 题图所示.



4359 题图

【4360】 计算积分:

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}f(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

其中 $$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, & 若\ z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & 若\ z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

解 由球面方程

$$x^2+y^2+z^2=t^2,$$

知

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{|t|}{\sqrt{t^2-(x^2+y^2)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=t^2\\ z^2=x^2+y^2\end{cases}$

可得 $x^2+y^2=\frac{t^2}{2}=\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2.$

所以 $$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}(x^2+y^2)\cdot\frac{|t|}{\sqrt{t^2-(x^2+y^2)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=|t|\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}}\frac{r^3}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r,$$

而 $$\int\frac{r^3\mathrm{d}r}{\sqrt{t^2-r^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{t^2-r^2-t^2}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}(t^2-r^2)$$

$$=\frac{1}{3}(t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-t^2(t^2-r^2)^{\frac{1}{2}}+C,$$

故

$$\int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}}\frac{r^3}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r=\left[\frac{1}{3}(t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-t^2(t^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\right]\Big|_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{-5\sqrt{2}}{12}|t|^3+\frac{2}{3}|t|^3=\frac{8-5\sqrt{2}}{12}|t|^3,$$

因此 $$F(t)=2\pi|t|\cdot\frac{8-5\sqrt{2}}{12}|t|^3=\frac{8-5\sqrt{2}}{6}\pi t^4.$$

【4361】 计算积分:

$$F(x,y,z,t)=\iint\limits_{S} f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S,$$

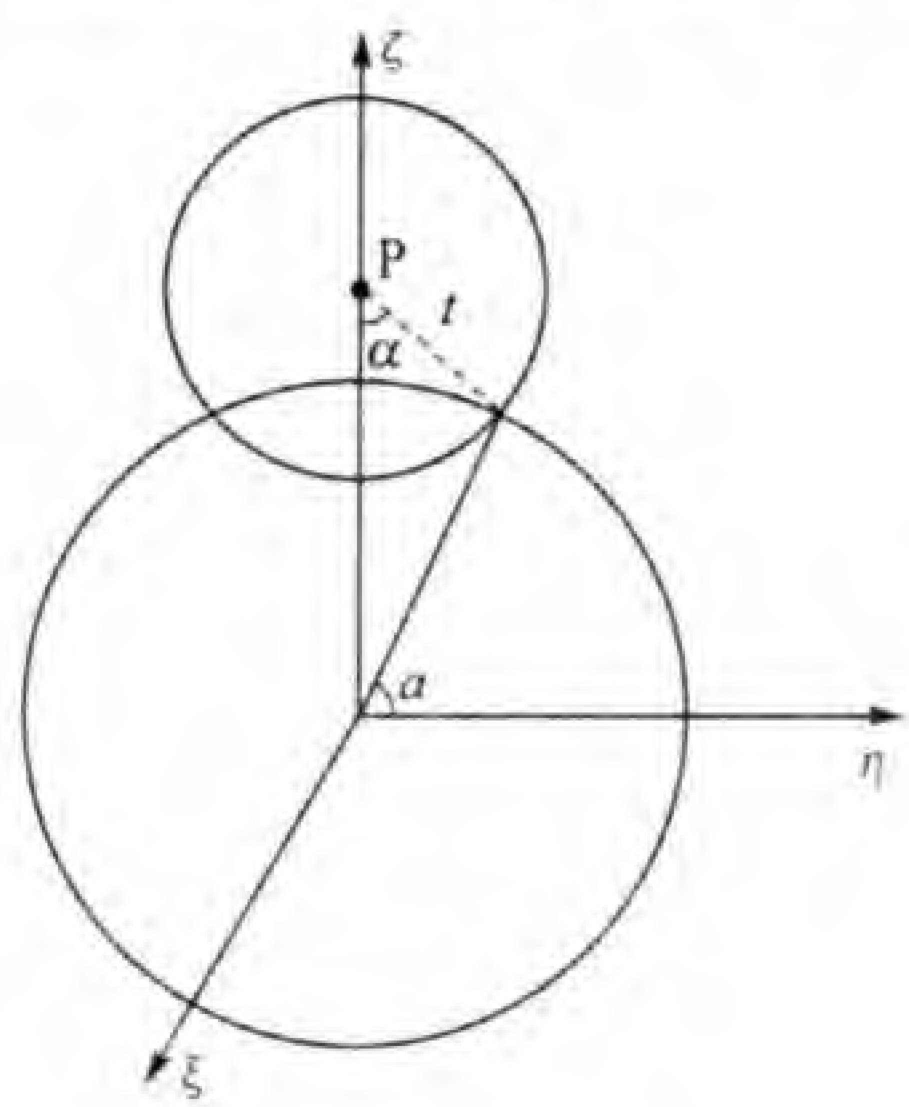
其中 S 为可变球面

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2,$$

且假定 $\qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>a>0,$

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\begin{cases}1, & 若\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2\\ 0, & 若\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant a^2.\end{cases}$$

解 记 $x^2+y^2+z^2=r^2$，旋转坐标轴，使点 $P(x,y,z)$ 位于 $O\zeta$ 轴的正方向上的点 $P_0(0,0,r)$，如 4361 题图所示.



4361 题图

显然，当 $0<t\leqslant r-a$ 及 $t\geqslant r+a$ 时，球面 S

$\xi^2+\eta^2+(\zeta-t)^2=t^2$ 与球体 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2$ 没有公共部分，从而积分

$$F(x,y,z,t)=\iint\limits_{S} f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S=0.$$

当 $r-a<t<r+a$ 时，球面 $\xi^2+\eta^2+(\zeta-r)^2=t^2$ 有一部分 S' 落在球体 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2$ 内，这时 $f(\xi,\eta,\zeta)=1$，且这部分球面 S' 的参数方程为

$$\xi = t\cos\varphi\sin\psi, \eta = t\sin\varphi\sin\psi,$$

$$\zeta - r = -t\cos\psi \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \psi \leqslant \alpha),$$

所以 $\mathrm{d}S = t^2\sin\psi$,

从而
$$F(x,y,z,t) = \iint_S f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\alpha} t^2\sin\psi\mathrm{d}\psi$$
$$= 2\pi t^2(1-\cos\alpha)$$
$$= 2\pi t^2\left(1 - \frac{t^2+r^2-a^2}{2rt}\right)$$
$$= \frac{\pi t}{r}[a^2-(r-t)^2].$$

计算以下第二类曲面积分(4362 ~ 4366).

【4362】 $\iint_S (x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$,其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

解 根据轮换对称,只要计算 $\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,并注意到上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 应取上侧,下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 应取下侧,则有

$$\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$-\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(-\sqrt{a^2-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 2\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\mathrm{d}r = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

根据对称性有

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S y\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \frac{4\pi a^3}{3},$$

故
$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\pi a^3.$$

【4363】 $\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $f(x)$,$g(u)$,$h(z)$ 为连续函数,为平行六面体的外侧面 $0\leqslant x\leqslant a;0\leqslant y\leqslant b;0\leqslant z\leqslant c$.

解 先计算

$$I_3=\iint\limits_S h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于六面体有四个面垂直于 xOy 平面,故面积分为零.所以

$$I_3=\iint\limits_S h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant b}}h(c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant b}}h(0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=ab[h(c)-(h_{(0)})],$$

同理 $$\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=[f(a)-f(0)]bc,$$

$$\iint\limits_S g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z=[g(b)-g(0)]ac,$$

故得 $$\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=abc\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right].$$

【4364】 $\iint\limits_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 为圆锥曲面 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外侧面.

解 记曲面在各坐标面上的投影域分别为 S_{xy},S_{yz} 和 S_{zx},并注意到曲面的法线方向,有

$$\iint\limits_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_S (z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\iint\limits_S (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\left[\iint\limits_{S_{yz}}(y-z)\mathrm{d}yz-\iint\limits_{S_{yz}}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]$$

$$+\left[\iint_{S_{zx}}(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\iint_{S_{zx}}(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right]$$

$$+\left[\iint_{S_{xy}}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{S_{xy}}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$=0+0+0=0.$$

【4365】 $\iint\limits_{S}\left(\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}\right)$,其中 S 为椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧面.

解 先计算

$$I_3=\iint_{S}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}=\iint_{S_1^-}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}+\iint_{S_2^+}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z},$$

其中 S_1^- 是下半椭球面

$$z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

取下侧,S_2^+ 是上半椭球面

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

取上侧,所以

$$I_3=2\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}.$$

利用广义极坐标

$$x=ar\cos\varphi,y=br\sin\varphi,$$

则 $$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=abr,$$

故 $$I_3=\frac{2ab}{c}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}}=\frac{4\pi ab}{c}.$$

根据对称性可得

$$I_1=\iint_{S}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}=\frac{4\pi bc}{a},I_2=\iint_{S}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{y}=\frac{4\pi ac}{b},$$

因此 $$\iint_S \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{y}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}=4\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)$$
$$=4\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

【4366】 $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧面.

解 先计算
$$I_3=\iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S_1^+} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_2^-} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
其中 S_1^+ 是上半球面
$$z-c=\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2},$$
取上侧,S_2^- 是下半球面
$$z-c=-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2},$$
取下侧,所以
$$I_3=\iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}\left[c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$-\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}\left[c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=4c\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变量代换
$$x=a+r\cos\varphi,\ y=b+r\sin\varphi,$$
则得 $$I_3=4c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,r\mathrm{d}r$$
$$=8\pi c\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R\right]=\frac{8}{3}\pi R^3c.$$

由对称性知

$$I_1 = \iint_S x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{8}{3}\pi R^3 a,$$

$$I_2 = \iint_S y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z = \frac{8}{3}\pi R^3 b.$$

因此 $$\iint_S x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c).$$

§15. 斯托克斯公式

若 $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$ 都是连续可微分函数，C 为包围分片光滑的有界双面曲面 S 的逐段光滑的简单封闭周线，则有斯托克斯公式：

$$\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 是指向周线 C 逆时针方向（对于右旋坐标系）环绕的那一面曲面 S 的法线的方向余弦.

【4367】 运用斯托克斯公式计算曲线积分

$$\int_C y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z,$$

其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$，若从 Ox 轴的正向来看，圆周为逆时针方向. 用直接计算来验证结果.

解 平面 $x + y + z = 0$ 的法线方向余弦为

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

所以 $$\oint_C y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= -\iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\mathrm{d}S = -\sqrt{3}\pi a^2.$$

下面直接计算. 将圆周 C 的方程化为参数方程. 以

$$z=-(x+y),$$

代入 $x^2+y^2+z^2=a^2$,

得 $x^2+y^2+(x+y)^2=a^2$,

即 $\frac{3}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-y)^2=a^2$,

故设 $x+y=\sqrt{\frac{2}{3}}a\cos t, y-x=\sqrt{2}a\sin t.$

由此可得 C 的参数方程为

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t-\sin t\right), y=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t+\sin t\right),$$

$$z=-\sqrt{\frac{2}{3}}a\cos t,$$

当 t 从 0 增加到 2π 时,动点描出曲线 C 的正向. 故

$$\oint_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}+\sin t\right)\left(\frac{\sin t}{\sqrt{3}}+\cos t\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sin t}{\sqrt{3}}+\cos t\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}-\sin t\right)\sin t\right]\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{d}t=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

【4368】 计算积分:

$$\int_{AmB}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z,$$

此积分是沿着螺线

$$x=a\cos\varphi, y=a\sin\varphi, z=\frac{h}{2\pi}\varphi.$$

从 $A(a,0,0)$ 点到 $B(a,0,h)$ 点的曲线所取的.

提示:用直线补充曲线 AmB 并运用斯托克斯公式.

解 连接线段 AB,则得闭曲线 $AmBA$,假设张这条曲线上

的曲面为 S,则应用斯托克斯公式知

$$\oint_{AmBA}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2-yz & y^2-xz & z^2-xy\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_S 0\mathrm{d}S=0,$$

又因直线段 AB 的方程为:

$$x=a,y=0,0\leqslant z\leqslant h,$$

故
$$\int_{AmB}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{AB}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^h z^2\mathrm{d}z=\frac{h^3}{3}.$$

【4369】 设 C 为位于平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 的封闭周线($\cos\alpha,y\cos\beta,\cos\gamma$ 为平面法线的方向余弦)并围成面积 S.求

$$\oint_C\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix},$$

其中周线 C 取正向.

解 记

$$P=\begin{vmatrix}\cos\beta & \cos\gamma\\ y & z\end{vmatrix}=z\cos\beta-y\cos\gamma,$$

$$Q=\begin{vmatrix}\cos\gamma & \cos\alpha\\ z & x\end{vmatrix}=x\cos\gamma-z\cos\alpha,$$

$$R=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta\\ x & y\end{vmatrix}=y\cos\alpha-x\cos\beta.$$

则应用斯托克斯公式得

$$\oint_{C}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}=\oint_{C}P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

$$=\iint_{S}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}dS$$

$$=2\iint_{S}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)dS=2\iint_{S}dS=2S.$$

运用斯托克斯公式,计算积分:

【4370】 $\int_{C}(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$,其中 C 为椭圆 $x=a\sin^2 t, y=2a\sin t\cos t, z=a\cos^2 t\ (0\leqslant t\leqslant\pi)$,沿参数 t 的递增方向.

解 应用斯托克斯公式有

$$\oint_{C}(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$$

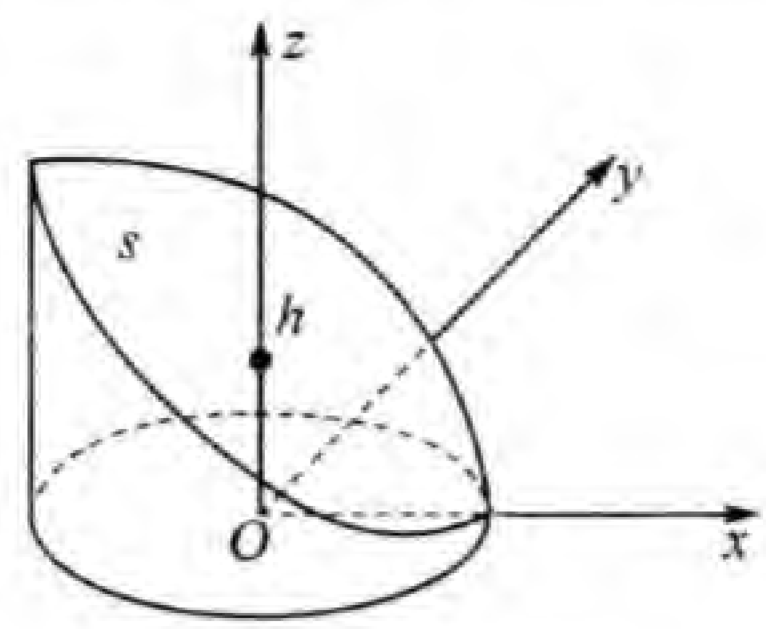
$$=\iint_{S}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}dS=\iint_{S}0\,dS=0.$$

【4371】 $\int_{C}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$,

其中 C 为椭圆 $x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1(a>0,h>0)$,若从 Ox 轴的正向来看,椭圆取逆时针方向.

解 如 4371 题图所示

把平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ 上 C 所围的区域记为 S,则 S 的法线方向为 $\{h,0,a\}$,即



4371 题图

$$\cos\alpha=\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}},\cos\beta=0,\cos\gamma=\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

应用斯托克斯公式得

$$\oint_C(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-2\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=-2\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}+0+\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\iint_S\mathrm{d}S$$

$$=-2\,\frac{h+a}{\sqrt{a^2+h^2}}\cdot a\sqrt{a^2+h^2}=-2\pi a(a+h).$$

【4372】 $\int_C(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中$C$为曲线$x^2+y^2+z^2=2Rx$，$x^2+y^2=2rx(0<r<R,z>0)$，曲线的方向使得被它围成的在球面$x^2+y^2+z^2=2Rx$外侧的最小域在其左边.

解 注意到球面的外法线方向的余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x-R}{R},\cos\beta=\frac{y}{R},\cos\gamma=\frac{z}{R}.$$

利用斯托克斯公式,可得

$$\oint_C (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$=2\iint_S [(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$=2\iint_S \left[(y-z)\left(\frac{x}{R}-1\right)+(z-x)\frac{y}{R}+(x-y)\frac{z}{R}\right]\mathrm{d}S$$

$$=2\iint_S (z-y)\mathrm{d}S.$$

由于曲面关于 xOz 平面对称,故

$$\iint_S y\mathrm{d}S=0,$$

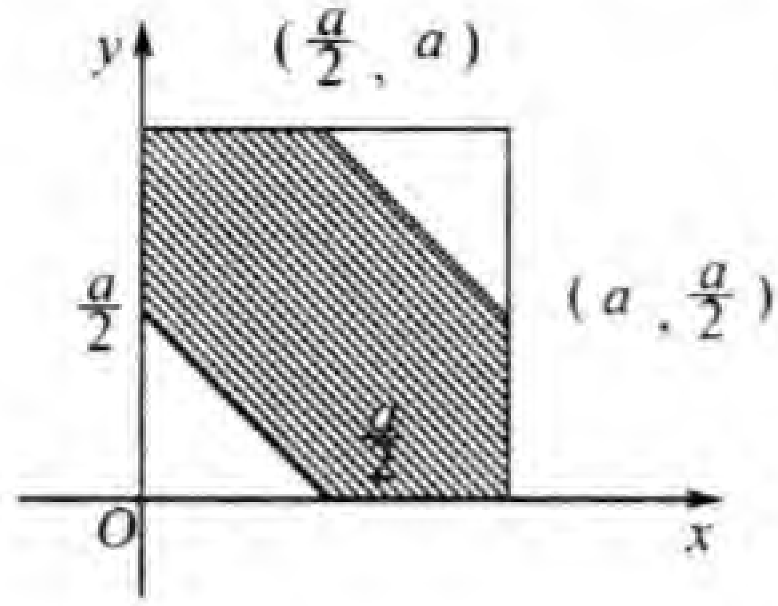
又 $$\iint_S z\mathrm{d}S=\iint_S R\cos\gamma\mathrm{d}S=R\iint_{x^2+y^2\leqslant 2rx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=R\pi r^2,$$

因此 $$\oint_C (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z=2\pi Rr^2.$$

【4373】 $\int_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中 C 为用平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 切立方体 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant a$ 的断面周线. 若从 Ox 轴的正向来看,周线为逆时针方向.

解 平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 含于立方体内的部分记为 S. 它在 xOy 平面的投影域为 S_{xy}(如4373题图所示),其面积为 $\frac{3}{4}a^2$. 对于平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 有

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



4373 题图

利用斯托克斯公式有

$$\oint_{C}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_S\Big[(-2y-2z)\frac{1}{\sqrt{3}}+(-2z-2x)\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$+(-2x-2y)\frac{1}{\sqrt{3}}\Big]\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_S(x+y+z)\mathrm{d}S=-4\times\frac{3}{2}a\iint_S\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}S$$

$$=-6a\iint_{S_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-6a\cdot\frac{3}{4}a^2=-\frac{9}{2}a^3.$$

【4374】 $\int_C y^2z^2\mathrm{d}x+x^2z^2\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z$,其中 C 为封闭曲线 $x=a\cos t,y=a\cos 2t,z=a\cos 3t$,朝参数 t 的递增方向进行.

解 本题直接计算线积分,较简单

$$\oint_C y^2z^2\mathrm{d}x+x^2z^2\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z$$

$$=-\int_0^{2\pi}a^5(\cos^2 2t\cos^2 3t\sin t+2\cos^2 t\cos^2 3t\sin 2t$$

$$+3\cos^2 t\cos^2 2t\sin 3t)\mathrm{d}t$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} a^5 (\cos^2 2t\cos^2 3t\sin t + 2\cos^2 t\cos^2 3t\sin 2t$$

$$+ 3\cos^2 t\cos^2 2t\sin 3t)\mathrm{d}t = 0.$$

【4375】 设函数

$$W(x,y,z) = ki\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\mathrm{d}S \ (k = \text{const})$$

其中 S 为受周线 C 围成的面积,$\vec{n}$ 为曲面 S 的法线,$\vec{r}$ 为连接空间点 $M(x,y,z)$ 与周线 C 的动点 $A(\zeta,\eta\zeta)$ 的向量,证明此函数是通过周线 C 的电流 i 产生的磁场$\vec{H}$ 的位势.(参见第 4340 题).

证 利用 4340 题的结论,并注意到

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{k},$$

其中 $\vec{r} = (\xi - x)\vec{i} + (\eta - y)\vec{j} - (\zeta - z)\vec{k},$

即得 $$\vec{H} = ki\oint_c \frac{\vec{r}\times \mathrm{d}\vec{s}}{r^3}$$

$$= ki\left[\left(\oint_C \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\zeta - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\eta\right)\vec{i}\right.$$

$$+ \left(\oint_c \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\xi - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\zeta\right)\vec{j}$$

$$\left. + \left(\oint_c \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\eta - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\xi\right)\vec{k}\right].$$

利用斯托克斯公式,并注意到

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi}, \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \zeta},$$

及 $$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

从而 $$\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right),$$

即得
$$H_x = ki\oint_c \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)d\zeta - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)d\eta$$
$$= ki\iint_S \left[\left(\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta\partial y} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\zeta\partial z}\right)\vec{i} - \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi\partial y}\vec{j} - \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi\partial z}\vec{k}\right]\cdot\vec{n}dS$$
$$= ki\frac{\partial}{\partial x}\iint_S \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\vec{n}dS$$
$$= ki\frac{\partial}{\partial x}\iint_S \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^2}dS = ki\frac{\partial}{\partial x}\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS,$$

同理
$$H_y = ki\frac{\partial}{\partial y}\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS,$$
$$H_z = ki\frac{\partial}{\partial z}\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS,$$

最后得到
$$\vec{H} = \frac{\partial w}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\vec{k},$$

即 $w(x,y,z)$ 是磁场 $\vec{H}$ 的位势.

§16. 奥斯特罗格拉茨基公式

若 S 为包围体积 V 的逐片光滑的曲面,$P = P(x,y,z)$,$Q = Q(x,y,z)$,$R = R(x,y,z)$ 在域 $V + S$ 内与其一阶偏导数均是连续函数,则有**奥斯特罗格拉茨基公式**:

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$
$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

若光滑曲面 S 围成有界体积 V 及 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是曲面 S 的外法线的方向余弦，运用奥斯特罗格拉茨基公式，变换以下曲面积分(4376 ~ 4380).

【4376】 $\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解 由于

$$P = x^3, Q = y^3, R = z^3,$$

从而 $$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) = 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

因此 $$\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【4377】 $\iint\limits_S yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解 $P = yz, Q = xz, R = xy.$

从而 $$\iint\limits_S xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xz\mathrm{d}x\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_V 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

【4378】 $\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathrm{d}S.$

解 $$P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$R = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

从而 $$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

所以 $$\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}S=2\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

【4379】 $\iint\limits_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S.$

解 $P=\frac{\partial u}{\partial x},Q=\frac{\partial u}{\partial y},R=\frac{\partial u}{\partial z},$

从而 $$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u,$$

故得 $$\iint\limits_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=\iiint\limits_V \Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【4380】 $\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S.$

解 因为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0,$$

故

$$\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

$$=\iiint\limits_V 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

【4381】 证明:若 S 为简单封闭曲面,$\boldsymbol{l}$ 为任意固定方向,则

$$\iint\limits_S\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\mathrm{d}S=0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法线.

证 设向量 $\vec{n}$ 与 $\vec{l}$ 的方向余弦分别为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 及

$\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1$,由于 $\vec{l}$ 的方向固定,故 $\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1$ 为常数. 又

$$\cos(\vec{n},\vec{l})=\cos\alpha\cdot\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1,$$

故
$$\cos(\vec{n},\vec{l})=\iint\limits_S[\cos\alpha_1\cos\alpha+\cos\beta_1\cos\beta+\cos\gamma_1\cos\gamma]\mathrm{d}S$$
$$=\iiint\limits_V\left[\frac{\partial}{\partial x}(\cos\alpha_1)+\frac{\partial}{\partial y}(\cos\beta_1)+\frac{\partial}{\partial z}(\cos\gamma_1)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iiint\limits_V 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

【4382】 证明由曲面 S 围的立体体积等于:

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线方向余弦.

证 由奥氏公式有

$$\iint\limits_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$$
$$=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint\limits_V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3V,$$

故得
$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos r)\mathrm{d}S.$$

【4383】 证明由光滑锥面 $F(x,y,z)=0$ 和平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 围成的锥体体积等于:

$$V=\frac{1}{3}SH,$$

其中 S 为位于该平面的锥底面积,H 为锥体高度.

证 对于任意固定的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 由奥氏公式可得

$$\iint\limits_{\Sigma}(x-x_0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(z-z_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=3\iiint\limits_V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3V,$$

其中 $\sum$ 是包围着有界体积 V 的封闭曲面并取外侧,故得

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x-x_0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (z-z_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

现取 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为锥面的顶，且令

$$\vec{r} = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k},$$

则
$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}[(x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\cos\beta + (z-z_0)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$
$$= \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}\vec{r}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(\vec{r})_{\vec{n}}\mathrm{d}S,$$

其中 $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 为曲面 $\sum$ 的外法线方向的单位向量，$(\vec{r})_{\vec{n}}$ 表示向量 $\vec{r}$ 在 $\vec{n}$ 上的投影. 而 $\sum$ 由锥面 S_1 和平面 S 所组成，在锥面 S_1 上，$\vec{r}\perp\vec{n}$，故

$$\iint\limits_{S_1}(\vec{r})_{\vec{n}}\mathrm{d}S = 0.$$

在平面 S 上

$$(\vec{r})_{\vec{n}} = H,$$

故
$$\iint\limits_{S}(\vec{r})_{\vec{n}}\mathrm{d}S = SH,$$

由此得
$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(\vec{r})_{\vec{n}}\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\iint\limits_{S_1}(\vec{r})_{\vec{n}}\mathrm{d}S + \frac{1}{3}\iint\limits_{S}(\vec{r})_{\vec{n}}\mathrm{d}S = \frac{1}{3}SH.$$

【4384】 求由曲面 $z=\pm c$ 和

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos u\cos v + b\sin u\sin v \\ y &= a\cos u\sin v - b\sin u\cos v \\ z &= c\sin u \end{aligned}\right\},$$

围成的立体体积.

解 法一：由 4382 题的结果知，所求体积为

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{S}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{3} \iint\limits_{S_1+S_2+S_3} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

其中 S_1, S_1, S_3 分别是平面 $z = c, z = -c$ 及曲面

$$\begin{cases} x = a\cos u\cos v + b\sin u\sin v \\ y = a\cos u\sin v - b\sin u\cos v \\ z = c\sin u, \end{cases} \quad ①$$

在 ① 中，当 $z = \pm c$ 时 $u = \pm\frac{\pi}{2}$，此时 $x^2 + y^2 = b^2$. 即 S_1, S_2 分别为圆域：$z = \pm c, x^2 + y^2 \leqslant b^2$. 而在 S_1, S_2 上

$$\cos\alpha = 0, \cos\beta = 0, \cos\gamma = \frac{c}{|c|},$$

所以 $\iint\limits_{S_1} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_1} |c| \mathrm{d}S = |c| \pi b^2,$

同样可得 $\iint\limits_{S_2} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}S = |c| \pi b^2,$

此外 $\iint\limits_{S_3} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}S$

$$\begin{aligned} &= \pm\int_0^{2\pi} \mathrm{d}v \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(a\cos u\cos v + b\sin u\sin v)\cdot(y'_u z'_v - y'_v z'_u) \\ &\quad + (a\cos u\sin v - b\sin u\cos v)(z'_u x'_v - z'_v x'_u) \\ &\quad + c\sin u(x'_u y'_v - x'_v y'_u)]\mathrm{d}u \\ &= \pm\int_0^{2\pi} \mathrm{d}v \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ca^2\cos u\mathrm{d}u = \pm 4\pi ca^2, \end{aligned} \quad ②$$

其中的正负号应这样选取，使对应于 S_3 的外侧. 下面来确定此正负号. S_3 的方程可改写为

$$x^2 + y^2 + \frac{a^2 - b^2}{c^2} z^2 = a^2,$$

记 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + \dfrac{a^2 - b^2}{c^2} z^2,$

于是，在 S_3 上，有

$$\cos\alpha=\frac{F'_x}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\beta=\frac{F'_y}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\gamma=\frac{F'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

其中正号对应于 S_3 的一侧，负号对应于 S_3 的另一侧. 于是，由于 $F(x,y,z)$ 是齐式函数，有

$$\begin{aligned}x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma&=\frac{xF'_x+yF'_y+zF'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}\\&=\frac{2F}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}=\frac{2a^2}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}.\end{aligned}\qquad ③$$

但在 S_3 与 xOy 平面的交线(即 $x^2+y^2=a^2,z=0$) 上对于 S_3 的外侧，此时向径 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 与外法线单位向量 $\vec{n}$ 的方向一致，故

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\vec{r}\cdot\vec{n}>0.$$

由此可知在 ③ 式中应取正号，所以

$$\begin{aligned}&\iint_{S_3}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S\\&=\iint_{S_3}\frac{2a^2}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}\mathrm{d}S>0,\end{aligned}$$

从而，由 ② 式知

$$\iint_{S_3}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=4\pi\,|\,c\,|\,a^2,$$

因此 $$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}(4\pi\,|\,c\,|\,a^2+2\,|\,c\,|\,\pi b^2)\\&=\frac{4\pi}{3}\,|\,c\,|\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right).\end{aligned}$$

法二：直接计算体积较为简单，由 ① 式知平面 $z=$ 常数(即 $u=$ 常数) 与曲面的交线是圆周

$$x^2+y^2=a^2\cos^2u+b^2\sin^2u,$$

故其截面面积

$$S(z)=\pi(a^2\cos^2u+b^2\sin^2u),$$

故所求体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_{-|c|}^{|c|}S(z)\mathrm{d}z\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\pi(a^2\cos^2u+b^2\sin^2u)\mid c\mid\mathrm{d}(\sin u)\\&=\mid c\mid\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[a^2+(b^2-a^2)\sin^2u]\mathrm{d}(\sin u)\\&=\pi\mid c\mid\left[2a^2+\frac{2}{3}(b^2-a^2)\right]\\&=\frac{4\pi}{3}\mid c\mid\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right).\end{aligned}$$

【4385】 求由曲面 $x=u\cos v,y=u\sin v,z=-u+a\cos v(u\geqslant 0)$ 和平面 $x=0,z=0$ $(a>0)$ 围成的立体体积.

解 法一:用 S_1 表示物体表面位于平面 $z=0$ 上的那一部分,S_2 表示物体表面由所给参数方程给出的曲面上那一部分,物体表面在平面 $x=0$ 上的那部分显然是一线段 $x=0,y=0,0\leqslant z\leqslant a$,所论曲面与平面 $z=0$ 的交线为 $u=a\cos v$. 由于 $u\geqslant 0$,故 $-\frac{\pi}{2}\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}$,由此所论曲面中 u,v 的变化范围为

$$\Omega:0\leqslant u\leqslant a\cos v,-\frac{\pi}{2}\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2},$$

故所求体积为

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{S_1+S_2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是外法线的方向余弦. 显然,在 S_1 上 $\cos\alpha=0,\cos\beta=0,\cos\gamma=-1,z=0$,故

$$\iint\limits_{S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S=0,$$

而在 S_2 上，有

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_2}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}S \\
&= \iint_{S_2}(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y) \\
&= \pm\iint_{\Omega}[x(y'_u z'_v - y'_v z'_u) + y(z'_u x'_v - z'_v x'_u) \\
&\quad + z(x'_u y'_v - x'_v y'_u)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \pm\iint_{\Omega}\begin{vmatrix} x & y & z \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \pm\iint_{\Omega}\begin{vmatrix} u\cos v & u\sin v & -u + a\cos v \\ \cos v & \sin v & -1 \\ -u\sin v & u\cos v & -a\sin v \end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \pm\iint_{\Omega}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a\cos v \\ \cos v & \sin v & -1 \\ -u\sin v & u\cos v & -a\sin v \end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \pm\iint_{\Omega} au\cos v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \pm\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\int_0^{a\cos v} au\cdot\cos v\mathrm{d}u \\
&= \pm\frac{a^3}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\mathrm{d}v = \pm a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\mathrm{d}v = \pm\frac{2}{3}a^3,
\end{aligned}$$

由于体积 $V > 0$，故取正号，因此

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}a^2 = \frac{2a^3}{9}.$$

法二：记 D 为物体在 xOy 平面上的投影域，则

$$V = \iint_D z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

将 $x = u\cos v$, $y = u\sin v$ 看作坐标变换，则

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\cos v & \sin v\\ -u\sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u,$$

故
$$V=\iint_D z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Omega(-u+a\cos v)u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\int_0^{a\cos v}(-u+a\cos v)u\,\mathrm{d}u$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{u^3}{3}+\frac{au^2\cos v}{2}\right]\Bigg|_0^{a\cos v}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\,\mathrm{d}v=\frac{2a^3}{9}.$$

【4385.1】 求由环面
$$\left.\begin{aligned}x&=(b+a\cos\psi)\cos\varphi\\ y&=(b+a\cos\psi)\sin\psi\\ z&=a\sin\psi\end{aligned}\right\}\qquad(0<a\leqslant b),$$
围成的立体体积.

解 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant\psi\leqslant 2\pi$,
$$V=\frac{1}{3}\iint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$$
$$=\pm\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\begin{vmatrix}x & y & z\\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial x}{\partial\psi} & \frac{\partial y}{\partial\psi} & \frac{\partial z}{\partial\psi}\end{vmatrix}\mathrm{d}\psi$$
$$=\pm\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\begin{vmatrix}(b+a\cos\psi)\cos\varphi & (b+a\cos\psi)\sin\varphi & a\sin\psi\\ -(b+a\cos\psi)\sin\varphi & (b+a\cos\psi)\cos\varphi & 0\\ -a\sin\psi\cos\varphi & -a\sin\psi\sin\varphi & a\cos\psi\end{vmatrix}\mathrm{d}\psi$$
$$=\pm\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}a[ab+(a^2+b^2)\cos\psi+ab\cos^2\psi]\mathrm{d}\psi$$
$$=\pm\frac{1}{3}\cdot\frac{3a^2b}{2}(2\pi)^2=\pm 2\pi^2a^2b.$$

由于 $V>0$,故取正号,因此

$$V = 2\pi^2 a^2 b.$$

【4386】 证明公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right\}$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z,t)\mathrm{d}S + \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$(t > 0).$$

证 设

$$I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

利用球坐标：

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, y = r\sin\varphi\cos\psi, z = r\sin\psi$$

$$\left(0 \leqslant r \leqslant t, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

$$I = \int_0^t \left[\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi, t) r^2\cos\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}r,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t\cos\varphi\cos\psi, t\sin\varphi\cos\psi, t\sin\psi, t)\cdot t^2\cos\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi$$

$$+\int_0^t \left[\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial t} f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi, t) r^2\cos\psi\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}t$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z,t)\mathrm{d}S + \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2} \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

运用奥斯特罗格拉茨基公式，计算以下曲面积分(4387～4389).

【4387】 $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为正方形 $0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant a$ 界限的外侧.

解 由奥氏公式得

$$\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iiint_V (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 2\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a (x+y+z)\mathrm{d}z$$

$$= 6\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a z\mathrm{d}z = 3a^4.$$

【4388】 $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

解 由奥氏公式得

$$\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^a r^2\cdot r^2\cos\psi\mathrm{d}r$$

$$= 6\pi\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\right)\left(\int_0^a r^4\mathrm{d}r\right) = \frac{12\pi a^5}{5}.$$

【4389】 $\iint_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外侧.

解 由奥氏公式得

$$\iint_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 为曲面

$$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1,$$

所围的立体.

作变换

$$u=x-y+z, v=y-z+x, w=z-x+y,$$

则 $$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial g} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=4,$$

因而 $$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\frac{1}{4},$$

又区域 V 变为 $|u|+|v|+|w|\leqslant 1$ 这是一个对称于坐标原点的正八面体，且在第一封限的部分由平面 $u+v+w=1, u=0, v=0, w=0$ 围成，其体积为 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{6}$ 故八面体的体积为 $8\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$,

因此 $$\iint_S (x-y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint_{|u|+|v|+|w|\leqslant 1}\frac{1}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}=1.$$

【4390】 计算 $\iint_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$，其中 S 为锥面 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的一部分，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为该曲面外法线的方向余弦.

提示：连接平面 $z=h, x^2+y^2\leqslant h^2$ 的部分.

解 合并平面 $S_1: z=h, x^2+y^2\leqslant h^2$ 的部分得一闭曲面 $S+S_1$ 利用奥氏公式得

$$\iint\limits_{S+S_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$
$$=2\iiint\limits_V(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 是由锥面 $x^2+y^2=z^2$ 和平面 $z=h$ 所围的区域. 利用柱面坐标可得

$$\iint\limits_{S+S_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$
$$=2\iiint\limits_V(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h r\mathrm{d}r\int_r^h[r(\cos\varphi+\sin\varphi)+z]\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\int_0^h(rh^2-r^3)\mathrm{d}r=\frac{\pi h^4}{2},$$

又 $$\iint\limits_{S_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$
$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}h^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi h^4,$$

因此 $$\iint\limits_S(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$
$$=\frac{\pi h^4}{2}-\pi h^4=-\frac{\pi h^4}{2}.$$

【4391】 证明公式:

$$\iiint\limits_V\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint\limits_S\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S$$

其中 S 为围成体积 V 的封闭曲面, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 在动点 (ξ,η,ζ) 的外法线, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$, $\boldsymbol{r}$ 为从 (x,y,z) 点到点 (ξ,η,ζ) 的向量.

证 先设曲面 S 不包围点 (x,y,z)(即点 (x,y,z) 在 V 之外), 我们有

$$\cos(\vec{r},\vec{n})=\cos(\vec{r},\xi)\cos(\vec{n},\xi)$$

$$+\cos(\vec{r},\eta)\cos(\vec{n},\eta)+\cos(\vec{r},\xi)\cos(\vec{n},\zeta)$$

而 $$\cos(\vec{r},\xi)=\frac{\xi-x}{r},\cos(\vec{r},\eta)=\frac{\eta-y}{r},$$

$$\cos(\vec{r},\zeta)=\frac{\zeta-z}{r},$$

故 $$\cos(\vec{r},\vec{n})=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma,$$

应用奥氏公式可得

$$\begin{aligned}&\iint_S\cos(\vec{r},\vec{n})\mathrm{d}S\\&=\iint_S\left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\&=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\zeta-z}{r}\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\\&=\iiint_V\frac{2}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

故 $$\iiint_V\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\delta}{r}=\frac{1}{2}\iint_S\cos(\vec{r},\vec{n})\mathrm{d}S.$$

若曲面 S 包围包围点 (x,y,z) 这时不能对 V 应用奥氏定理. 以 (x,y,z) 为中心充分小的正数 ε 为半径作开球域 V_ε 使得 $V_\varepsilon\subset V$. 其边界以 S_ε 表示. 对 $V-V_\varepsilon$ 应用奥氏公式. 利用上面的结果可得

$$\iint_S\cos(\vec{r},\vec{n})\mathrm{d}S+\iint_{S_\varepsilon}\cos(\vec{r},\vec{n})\mathrm{d}S=2\iiint_{V-V_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r},\qquad ①$$

但在 S_ε 上, $\vec{n}$ 的方向与 $\vec{r}$ 的方向相反. 故

$$\cos(\vec{r},\vec{n})=-1,$$

$$\iint_{S_\varepsilon}\cos(\vec{r},\vec{n})\mathrm{d}S=-4\pi\varepsilon^2,$$

由此可知在 ① 式中令 $\varepsilon\to+0$ 即得

$$\iiint_V\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint_S\cos(\vec{r},\vec{n})\mathrm{d}S.$$

【4392】 计算高斯积分：

$$I(x,y,z)=\iint\limits_{S}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\mathrm{d}S,$$

其中 S 为限制体积 V 的简单光滑封闭曲面，$\vec{n}$ 为曲面 S 在点(ξ,η,ζ) 的外法线，r 为连接(x,y,z) 点与点(ξ,η,ζ) 的向量，$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$.

研究两种情况：(1) 当曲面不包围(x,y,z) 点时；(2) 当曲面包围(x,y,z) 点时.

解 设法线 $\vec{n}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则

$$\cos(\vec{r},\vec{n})=\cos(\vec{r},\xi)\cos\alpha+\cos(\vec{r},\eta)\cos\beta+\cos(\vec{r},\zeta),$$

如 $\cos\gamma$

$$=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma,$$

因此，高斯积分

$$I(x,y,z)=\iint\limits_{S}\frac{\xi-x}{r^3}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi+\frac{\eta-y}{r^3}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi+\frac{\zeta-z}{r^3}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta,$$

这里 $P=\dfrac{\xi-x}{r^3},Q=\dfrac{\eta-y}{r^3},R=\dfrac{\zeta-z}{r^3},$

于是 $\dfrac{\partial P}{\partial\xi}=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3(\xi-x)}{r^5},\dfrac{\partial Q}{\partial\eta}=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3(\eta-y)^2}{r^5},$

$\dfrac{\partial R}{\partial\zeta}=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3(\zeta-z)}{r^5}$ 它们仅在点(x,y,z) 处不连续. 因此

(1) 当曲面 S 不包围点(x,y,z) 时，在 V 上有

$$\frac{\partial P}{\partial\xi}+\frac{\partial Q}{\partial\eta}+\frac{\partial R}{\partial\zeta}=0,$$

由奥氏公式有

$$I(x,y,z)=\iint\limits_{S}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\mathrm{d}S=0.$$

(2) 当曲面 S 包围点(x,y,z) 时，则以点(x,y,z) 为中心 ε 为半径作一球 V_ε 使得 $V_\varepsilon\subset V$，V_ε 的边界记为 S_ε，将奥氏公式用于 $V-V_\varepsilon$，则得

$$\iint\limits_{S+S_\varepsilon} \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\mathrm{d}S = 0,$$

但 $$\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_\varepsilon}\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\mathrm{d}S = -4\pi,$$

故 $$\begin{aligned} I(x,y,z) &= \iint\limits_{S} \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\mathrm{d}S \\ &= -\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\mathrm{d}S = 4\pi. \end{aligned}$$

【4393】 证明:若

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

S 为围成有界体积 V 的光滑曲面,则下列公式是正确的:

(1) $$\iint\limits_{S} \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = \iiint\limits_{V} \Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

(2) $$\begin{aligned} \iint\limits_{S} u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = &\iiint\limits_{V}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &+ \iiint\limits_{V} u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

其中 u 为在 $V+S$ 域内与其直到二阶偏导数(包括二阶)一起的连续函数和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 的外法线导数.

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

因此,由奥氏公式可得

(1) $$\begin{aligned} \iint\limits_{S} \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S &= \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial z}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S \\ &= \iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iiint\limits_{V} \Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

(2) $\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$

$$=\iint\limits_S\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+u\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+u\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iiint\limits_V\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_V u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【4394】 证明空间的第二格林公式：

$$\iiint\limits_V\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

其中 V 为由曲面 S 围的体积；n 为曲面 S 的外法线方向，函数 $u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$ 在 $V+S$ 域内可微分两次.

证 $\iint\limits_S\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}S$

$$=\iint\limits_S\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\beta\right.$$
$$\left.+\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

$$=\iiint\limits_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_V\left[v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right.$$
$$\left.-u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_V\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【4395】 若函数 $u=(x,y,z)$ 在某个域内具有直到二阶(包

括二阶）的连续导数的且

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

则函数 $u=u(x,y,z)$ 称为调和函数

证明：若 u 是在由光滑曲面 S 围成的有界封闭域内的调和函数，则下式是正确的：

(1) $\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=0$;

(2) $\iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_S u\,\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S.$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法线.

利用公式(2) 证明：在域 V 内调和的函数由其在边界 S 上的值唯一确定.

证 (1) 由于 $\Delta u=0$ 由 4393 题(1) 的结果即得

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint\limits_V \Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

(2) 由 4393 题(2) 的结果，即得

$$\begin{aligned}&\iint\limits_S u\,\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\\&=\iiint\limits_V u\cdot 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

设 u_1,u_2 在 V 上为调和函数，且在 S 上 $u_1(x,y,z)=u_2(x,y,z)$，设 $u=u_1-u_2$，则 $u(x,y,z)$ 在 V 上调和且在 S 上 $u=0$，则由前面的结论有

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iint\limits_S u\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=0,\end{aligned}$$

因此 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial z}\equiv 0$,

即 $u(x,y,z)\equiv$ 常数$((x,y,z)\in V)$,

但在 S 上 $u=0$ 故在 V 上 $u\equiv 0$. 因此 $u_1\equiv u_2$(在 V 上).

【4396】 证明:函数 $u=u(x,y,z)$ 在由光滑曲面 S 围成的有界封闭域内是调和的,则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[u\frac{\cos(r,n)}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S,$$

其中 $\vec{r}$ 为在 V 域内从 (x,y,z) 内点到曲面 S 动点 (ξ,η,ζ) 的向量; $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$, $\vec{n}$ 为曲面 S 在点 (ξ,η,ζ) 的外法线向量.

证 利用 4394 题中的格林第二公式

$$\iint_S\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\iiint_V\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

取 $$v=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\delta-z)^2}},$$

则当 $(\xi,\eta,\zeta)\neq(x,y,z)$ 时有 $\Delta v=0$.

现以 $M(x,y,z)$ 为中心,充分小的正数 ε 为半径作一球面 S_ε 含于曲面 S 内. 将格林第二公式应用到由曲面 $S+S_\varepsilon$ 所围的立体 V_ε 内得

$$\iint_{S+S_\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}S=0,$$

即 $$\iint_{S_\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}S=-\iint_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}S.$$

显然,S 上的法线是向外的,而 S_ε 上的法线是指向球心的. 即 $\vec{r}$ 与 $\vec{n}$ 的方向相向. 因此

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\Bigg|_{r=\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

并且由 4395 题知

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = 0,$$

所以 $\displaystyle\iint\limits_{S_\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}S = -\iint\limits_{S_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^2}u\mathrm{d}S,$

从而利用中值定理可得

$$\iint\limits_{S_\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}S$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon^2}u(x_1,y_1,z_1)\cdot 4\pi\varepsilon^2 = -4\pi u(x_1,y_1,z_1),$$

其中 $(x_1,y_1,z_1)\in S_\varepsilon$. 故

$$u(x_1,y_1,z_1) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}S,$$

其中 $(x_1,y_1,z_1)\in S_\varepsilon$，而右端与 ε 无关.

令 $\varepsilon\to+0$ 并注意到 $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}u(x_1,y_1,z_1) = u(x,y,z)$. 即得

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}S.$$

最后在曲面 S 上

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial n}$$

$$= -\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial r}{\partial\xi}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial r}{\partial\eta}\cos\beta + \frac{\partial r}{\partial\xi}\cos\gamma\right]$$

$$= -\frac{1}{r^2}\left[\frac{\xi - x}{r}\cos\alpha + \frac{\eta - y}{r}\cos\beta + \frac{\xi - z}{r}\cos\gamma\right]$$

$$= -\frac{1}{r^2}\cos(\vec{r},\vec{n}),$$

代入前式即得

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left(u\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$

【4397】 证明：若 $u = u(x,y,z)$ 为在半径为 R 球心为

(x_0, y_0, z_0) 的球 S 内是调和函数,则

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(x, y, z)\mathrm{d}S \quad (中值定理).$$

证 就用 4396 题,并注意到在球面 S 上有 $r = R$, $\cos(\vec{r}, \vec{n}) = 1$,得

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(u\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\frac{u}{R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(x, y, z)\mathrm{d}S, \end{aligned}$$

最后一等式利用到 4395 题的结果 $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = 0$.

【4398】 证明:函数 $u = u(x, y, z)$ 在有界封闭域 V 内是连续的且调和的,若这个函数不是常数,则在域的内点上不能达到其最大值和最小值(最大值原理).

证 证明与 4337 题完全类似. 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 V 的内点,且 $u(x, y, z)$ 在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 达到最大值,则 $u(x, y, z)$ 在 V 上必常数. 分三步来证明.

① 若球域

$$V_\varepsilon = \{(x, y, z) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leqslant \varepsilon^2\} \subset V,$$

则 $u(x, y, z)$ 在 V_ε 上必为常数. 事实上,对任何的 $0 < r \leqslant \varepsilon$ 设

$$S_r = \{(x, y, z) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\},$$

由 4397 题的结果知

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r} u(x, y, z)\mathrm{d}S,$$

故

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r}[u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z)]\mathrm{d}S = 0,$$

但因 $u(x_0, y_0, z_0)$ 为最大值,故在 S_r 上恒有

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \geqslant 0,$$

由 $u(x,y,z)$ 的连续性知在 S_r 上必有

$$u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)\equiv 0,$$

否则,若存在 $(x_1,y_1,z_1)\in S_r$,

使得 $\quad u(x_0,y_0,z_0)-u(x_1,y_1,z_1)=a>0,$

则由 $u(x,y,z)$ 的连续性知,必存在以 (x,y,z) 为中心的一个小球域 σ 使得当 $(x,y,z)\in\sigma$ 时,恒有

$$u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)>\frac{a}{2}.$$

用 σ_r 表示 S_r 含于 σ 内的部分及表面积则

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{S_r}[u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)]\mathrm{d}S\\ \geqslant&\iint\limits_{\sigma_r}[u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)]\mathrm{d}S\\ \geqslant&\iint\limits_{\sigma_r}\frac{a}{2}\mathrm{d}S=\frac{a}{2}\sigma_r>0,\end{aligned}$$

矛盾. 因此在 S_r 上有 $u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0)$ 由 $r(0<r\leqslant\varepsilon)$ 的任意有

$$u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0)\qquad((x,y,z)\in V_\varepsilon).$$

(2) 设 $M^*(x^*,y^*,z^*)$ 为 V 的唯一内点则必有

$$u(x^*,y^*,z^*)=u(x_0,y_0,z_0).$$

事实上,用完全属于 V 的内部的折线 l 将 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 及 $M^*(x^*,y^*,z^*)$ 连结起来用 δ 表示 l 与 ∂V 的距离. 取 $\varepsilon(0<\varepsilon<\delta)$ 以点 M_0 为中心, ε 为半径作一球

$$V_0=\{(x,y,z)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant\varepsilon^2\}.$$

由(1)的结论知 $u(x,y,z)$ 在 V_0 中为常数,特别地 $u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0)$ 这里点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是球面

$$S_0=\{(x,y,z)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\varepsilon^2\}.$$

与折线 l 的交点. 又以点 M_1 为中心, ε 为半径作一球域

$$V_1=\{(x,y,z)\mid(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\leqslant\varepsilon^2\}.$$

同样在 V_1 上有 $u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0)$,依次类推可得

$$u(x^*,y^*,z^*)=u(x_0,y_0,z_0).$$

(3) 若$(x,y,z)\in\partial V$,则由(2)的结果及u的连续性可得

$$u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0).$$

因此,$u(x,y,z)$在V上恒为常数,若$u(x,y,z)$在V的内点取最小值则考虑$-u$.由前面的结论可知$-u$恒为常数,从而u恒为常数.

【4399】 物体V整个沉入液体中,根据帕斯卡定律,证明:液体的浮力等于与物体同体积液体的重量并垂直向上(阿基米德定律).

证 取液体的自由面为xOy平面Oz轴垂直向下.设液体的比重为ρ取物体的表面面积元素$\mathrm{d}S$.设此面积元浸在液体内,离开液面的深度为z,则此面积元所受的压力是$\rho z\mathrm{d}S$,方向和曲面的外法线方向相反因而在各坐标轴上的投影分别为

$$-\rho z\cos\alpha\mathrm{d}S,-\rho z\cos\beta\mathrm{d}S,-\rho z\cos\gamma\mathrm{d}S.$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是曲面上点的外法线方向余弦.由此,液体对整个物体的浮力为

$$F_x=-\rho\iint\limits_S z\cos\alpha\mathrm{d}S=-\rho\iiint\limits_V 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

$$F_y=-\rho\iint\limits_S z\cos\beta\mathrm{d}S=-\rho\iiint\limits_V 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

$$F_z=-\rho\iint\limits_S z\cos\gamma\mathrm{d}S=-\rho\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\rho V.$$

即物体所受的浮力,其大小等于同体积液体的重量,而方向垂直向上.

【4400】 令S_t为变动的球面$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2$,而函数$f(\xi,\eta,\zeta)$是连续的.证明:函数

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_t}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{t}\mathrm{d}S_t,$$

满足波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

和初值条件:

$$u\Big|_{t=0}=0,\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=f(x,y,z).$$

提示：用三重积分表示导数$\frac{\partial u}{\partial t}$.

证 S_t 的参数方程为

$$\begin{cases}\xi=x+t\sin\theta\cos\varphi\\ \eta=y+t\sin\theta\sin\varphi,\\ \zeta=z+t\cos\theta\end{cases}$$

其中 θ 和 φ 在区域

$$\Omega=\{(\theta,\varphi)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\varphi\leqslant2\pi\},$$

上的变化，则

$$\mathrm{d}S_t=t^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

因而有 $$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}f(x+t\sin\theta\cos\varphi,y+t\sin\theta\sin\varphi,z+t\cos\theta)t\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,\qquad ①$$

故得$u|_{t=0}=0$.

将 ① 对 t 求导得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}f(x+t\sin\theta\cos\varphi,y+t\sin\theta\sin\varphi,z+t\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}\Big(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial\xi}+\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial\eta}+\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\zeta}\Big)t\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,\qquad ②$$

从而，得

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}f(x,y,z)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{4\pi}f(x,y,z)\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=f(x,y,z),$$

因此，初值条件$u|_{t=0}=0$ 及$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=f(x,y,z)$ 都满足

将 ② 式改变形式. 由 S_t 的外法线的方向余弦分别为

$$\cos\alpha = \frac{\xi - x}{t} = \sin\theta\cos\varphi,$$

$$\cos\beta = \frac{\eta - y}{t} = \sin\theta\sin\varphi,$$

$$\cos\gamma = \frac{\zeta - z}{t} = \cos\theta,$$

于是,利用奥氏公式(2)化为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega} f(x + t\sin\theta\cos\varphi, y + t\sin\theta\sin\varphi, z + t\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi \\
&\quad + \frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\cos\gamma\right) t\sin\theta d\theta d\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega} f(x + t\sin\theta\cos\varphi, y + t\sin\theta\sin\varphi, z + t\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi \\
&\quad + \frac{1}{4\pi t}\iint_{S_t}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\cos\gamma\right) dS_t \\
&= \frac{1}{4\pi t}\iint_{\Omega} f(x + t\sin\theta\cos\varphi, y + t\sin\theta\sin\varphi, z + t\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi \\
&\quad + \frac{1}{4\pi t}\iiint_{V_t}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right) d\xi d\eta d\zeta,
\end{aligned}$$

其中 V_t 是由 S_t 所围的球域. 再对 t 求导得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\cos\gamma\right)\sin\theta d\theta d\varphi \\
&\quad - \frac{1}{4\pi t^2}\iiint_{V_t}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right) d\xi d\eta d\zeta \\
&\quad + \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_t}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right) d\xi d\eta d\zeta \\
&= \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Omega} d\theta d\varphi \cdot \int_0^t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right) r^2\sin\theta dr \\
&= \frac{1}{4\pi t}\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right) t^2\sin\theta d\theta d\varphi,
\end{aligned}$$

另一方面由 ① 式可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right)t\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{1}{4\pi t}\iint_{S_t}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right)\mathrm{d}St,$$

故知函数 $u(x,y,z,t)$ 满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

§17. 场论元素

1. **梯度** 若 $u(\vec{r})=u(x,y,z)$,这里 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$,是连续可微分纯量场,则向量

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

称之为梯度或简化为 $\mathrm{grad}u=\nabla u$,这里:

$$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

在点 (x,y,z) 场 u 的梯度方向与通过这个点的等位面 $u(x,y,z)=C$ 的法线方向相同. 对于场的每一个点,梯度

给出函数 u 变化的最大速度 $|\mathrm{grad}u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$ 和方向.

在某个方向 $l\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 上场 u 的导数等于:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathrm{grad}u\cdot l=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2. **场的散度和场的旋度** 若:

$$\vec{a}(\vec{r})=\vec{a}_x(x,y,z)\vec{i}+\vec{a}_y(x,y,z)\vec{j}+\vec{a}_z(x,y,z)\vec{k},$$

是连续可微分向量场,则纯量

$$\mathrm{div}\,\vec{a}\equiv\nabla\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z},$$

称之为这个场的散度或发散度.

向量

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\nabla\times\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

称为场的旋度.

3. **通过曲面的流量**　若向量$\vec{a}(\vec{r})$在域Ω内产生向量场,则称以下积分:

$$\iint\limits_S a_n\mathrm{d}S=\iint\limits_S(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

为通过位于域Ω内的已知曲面S的流量,已知曲面是指表示法线单位向量$\vec{n}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$的那一面.其中$a_n=u_n$为向量的正常投影.在向量的论述中奥斯特罗格拉茨基公式采用以下形式$\oiint\limits_S a_n\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\operatorname{div}\vec{a}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,这里$S$是围成体积$V$的曲面,$n$为曲面$S$外法线的单位向量.

4. **向量的环流**　数

$$\int_C\vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r}=\int_C a_x\,\mathrm{d}x+a_y\,\mathrm{d}y+a_z\,\mathrm{d}z,$$

称为向量$\vec{a}(\vec{r})$,沿着某个曲线C取得的线积分(场作的功).

若周线C封闭,则线积分称为向量$\vec{a}$沿着周线C的环流.

在向量形式上斯托克斯公式具有以下形式:$\oint_C\vec{a}\,d\,\vec{r}=\iint\limits_S(\operatorname{rot}\vec{a})_n\mathrm{d}S$,其中$C$为围成曲面$S$的封闭周线,而且曲面$S$的法线$\vec{n}$方向应该这样选择,对于站在曲面$S$上的观察者来说,面向法线方向,周线$C$逆时针方向旋转(对于右侧坐标系).

5. **势场**　作为某个纯量u的梯度的向量场$\vec{a}(\vec{r})$

$$\operatorname{grad}u=\vec{a},$$

称为势场,而数值u被称为场的势.

若势 u 是单值函数，则：

$$\int_{AB} \vec{a}\,\mathrm{d}\,\vec{r} = u(B) - u(A).$$

特别是在这种情况下，向量$\vec{a}$ 的环流等于零.

条件 $\mathrm{rot}\,\vec{a} = 0$，是在单连通域内给出的场势$\vec{a}$ 的充要的条件，亦即这样的场应该是无旋场.

【4401】 求场 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ 在下列各点的梯度数值和方向：(1) $O(0,0,0)$；(2) $A(1,1,1)$；(3) $B(2,0,1)$. 在哪个点处场的梯度等于零？

解 $\mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$

$$= (2x + y + 3)\vec{i} + (4y + x - 2)\vec{j} + (6z - 6)\vec{k}.$$

(1) 在 O 点有

$$\mathrm{grad}u(0) = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}, |\mathrm{grad}u(0)| = 7,$$

方向 $\cos\alpha = \frac{3}{7}, \cos\beta = -\frac{2}{7}, \cos\gamma = -\frac{6}{7}.$

(2) $\mathrm{grad}u(A) = 6\vec{i} + 3\vec{j}, |\mathrm{grad}u(A)| = 3\sqrt{5},$

方向 $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\gamma = 0.$

(3) $\mathrm{grad}u(B) = 7\vec{i}, |\mathrm{grad}u(B)| = 7,$

方向 $\cos\alpha = 1, \cos\beta = 0, \cos\gamma = 0.$

要使 $\mathrm{grad}u = \vec{0}$ 必须

$$2x + y + 3 = 0, x + 4y - 3 = 0, 6z - 6 = 0.$$

解之得 $x = -2, y = 1, z = 1,$

即在点$(-2,1,1)\mathrm{grad}u = \vec{0}.$

【4401.1】 令 $u = xy - z^2$，求 $\mathrm{grad}u$ 在$M(-9,12,10)$ 点的数值和方向.

导数$\frac{\partial u}{\partial l}$ 在坐标角 xOy 的等分线方向上等于多少？

解 $\text{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$

$$= y\vec{i} + x\vec{j} - 2z\vec{k},$$

所以 $\text{grad}u(M) = 12\vec{i} - 9\vec{j} - 20\vec{k}$,

$$|\text{grad}u(M)| = \sqrt{12^2 + (-9)^2 + (-20)^2} = \sqrt{625} = 25,$$

方向 $\cos\alpha = \frac{12}{25}, \cos\beta = -\frac{-9}{25}, \cos\gamma = -\frac{4}{5}$.

【4402】 在空间 $Oxyz$ 的哪些点,场

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$$

的梯度(1) 垂直于 Oz 轴;(2) 平行于 Oz 轴;(3) 等于零.

解 $\text{grad}u$

$$= 3(x^2 - yz)\vec{i} + 3(y^2 - xz)\vec{j} + 3(z^2 - xy)\vec{k}.$$

(1) $\text{grad}u \perp Oz$ 当且仅当 $\text{grad}u \cdot \vec{k} = 0$,即 $3(z^2 - xy) = 0$. 因此在满足 $z^2 = xy$ 的点 (x,y,z) 上,其梯度垂直于 Oz 轴.

(2) 要 $\text{grad}u$ 平行 Oz 轴,只要

$$3(x^2 - yz) = 0, 3(y^2 - xz) = 0,$$

解之得 $x = y = 0$ 或 $x = y = z$. 即当 $x = y = 0$ 或 $x = y = z$ 时其梯度平行于 Oz 轴.

(3) 要 $\text{grad}u = 0$ 必须

$$3(x^2 - yz) = 0, 3(y^2 - xz) = 0,$$

$$3(z^2 - xy) = 0,$$

解之得 $x = y = z$. 即当 $x = y = z$ 时 $\text{grad}u = \vec{0}$.

【4403】 设数量场:

$$u = \ln\frac{1}{r},$$

其中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$,

在空间 $Oxyz$ 的哪些点有等式 $|\text{grad}u| = 1$?

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y-b}{r^2},$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z-c}{r^2},$$

$$|\operatorname{grad}u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{r^4}[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}=\frac{1}{r}.$$

当且仅当 $r=1$ 时，$|\operatorname{grad}u|=1$. 即在以(a,b,c)为中心，1为半径的球面上，有等式 $|\operatorname{grad}u|=1$.

【4404】 作数量场

$$u=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2},$$

的等位面. 求通过点 $M(9,12.28)$ 的等位面. 在域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 36$ 内 $\max u$ 等于多少?

解 等位面的方程为

$$\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}=u$$

（常数），

显然 $$u\geqslant\sqrt{(z+8)^2}+\sqrt{(z-8)^2}$$
$$\geqslant z+8-(z-8)^2=16,$$

于是当 $u\geqslant 16$ 时，有

$$u-\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2},$$

平方并化简得

$$u^2-32z=2u\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2},$$

再平方得

$$4u^2[x^2+y^2+(z-8)^2]=u^4-64u^2z+1024z^2,$$

即等位面为

$$\frac{x^2+y^2}{\frac{u^2-256}{4}}+\frac{z^2}{\frac{u^2}{4}}=1.$$

这是一个绕 Oz 轴旋转的旋转椭球面，图略.

当 $x=9,y=12,z=28$ 时 $u=64$. 因此，过点$(9,12,28)$的等位面为

$$\frac{x^2+y^2}{960}+\frac{z^2}{1024}=1,$$

在域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 36$ 内,由于

$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2+16z+64}$$
$$+\sqrt{x^2+y^2+z^2-16z+64}$$
$$\leqslant\sqrt{100+16z}+\sqrt{100-16z}\qquad(10\leqslant z\leqslant 16),$$

故函数 $f(z)=\sqrt{100+16z}+\sqrt{100-16z}$.

在[0,6]上的最大值即为 u 的最大值,但

$$f'(z)=8\left(\frac{1}{\sqrt{100+16z}}-\frac{1}{\sqrt{100-16z}}\right)<0,$$

故 $f(z)$ 在[0,6]上严格减少,从而

$$\max_{0\leqslant z\leqslant 6}f(z)=f(0)=20,$$

因此 $\max\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 36}u=20.$

【4405】 求场 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ 在点(1,2,3)和 $B(-3,1,0)$ 处梯度之间的夹角 φ.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

在 A,B 点梯度分别为

$$\mathrm{grad}u(A)=\frac{1}{81}(7\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}),$$

$$\mathrm{grad}u(B)=\frac{1}{50}(-4\vec{i}+3\vec{j}),$$

所以 $$\cos\varphi=\frac{7\cdot(-4)+(-4)\cdot 3}{\sqrt{7^2+(-4)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+3^2}}$$

$$=\frac{-40}{9\times 5}=-\frac{8}{9}.$$

【4406】 假定给出纯量场 $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. 作出场的等位面和场梯度的等模面. 求在域 $1<z<2$ 内的 $\inf u$, $\sup u$, $\inf|\operatorname{grad}u|$, $\sup|\operatorname{grad}u|$.

解 场的等位面是

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=u \qquad (|u|\leqslant 1).$$

当 $u=0$ 时, 得 $\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$, 这是 xOy 平面但需除去原点.

当 $u\neq 0$ 时等位面方程可化为

$$x^2+y^2=\frac{1-u^2}{u^2}z^2.$$

当 $0<|u|<1$ 时, 等位面是一个以原点为顶点 Oz 轴为旋转轴的圆锥但要去掉原点 $O(0,0,0)$.

当 $u=\pm 1$ 时, 等位面是 Oz 轴, 但要去掉原点.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

故
$$|\operatorname{grad}u|=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2},$$

等模面的方程为

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}=c.$$

当 $c=0$ 时, 等模面是 Oz 轴但要去掉原点.

当 $c>0$ 时, 等模面为

$$c(x^2+y^2+z^2)=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (x^2+y^2+z^2\neq 0),$$

这是 yOz 平面上中心在 $\left(\frac{1}{2c},0\right)$ 且与 Oz 轴相切的圆 $y^2+z^2=\frac{1}{c}$，绕 Oz 轴旋转所得的环面并去掉原点.

当 $1<z<2$ 时，显然有 $0<u\leqslant 1$；且

当 $x=y=0$ 时，$u=1$；而当 $x^2+y^2\to+\infty$ 时，$u\to 0$，故

$$\inf_{1<z<2} u=0,\ \sup_{1<z<2} u=1.$$

又 $$|\operatorname{grad}u|\geqslant 0,$$

且当 $x=y=0$ 时，

$$|\operatorname{grad}u|=0,$$

故 $$\inf_{1<z<2}|\operatorname{grad}u|=0.$$

最后求 $$\sup_{1<z<2}|\operatorname{grad}u|.$$

令 $\sqrt{x^2+y^2}=r$，则

$$|\operatorname{grad}u|=\frac{r}{r^2+z^2},$$

由不等式 $2|ab|\leqslant a^2+b^2$ 有

$$|\operatorname{grad}u|=\frac{r}{r^2+z^2}\leqslant\frac{1}{2|z|}=\frac{1}{2z}\qquad(1<z<2),$$

从而知 $$\sup_{1<z<2}|\operatorname{grad}u|=\frac{1}{2}.$$

【4407】 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 求两个无限接近的等位面 $u(x,y,z)=c$ 和 $u(x,u,z)=c+\Delta c$ 之间的距离，精确到高阶无穷小. 式中 $u(x_0,y_0,z_0)=c(\operatorname{grad}u(x_0,y_0,z_0)\neq 0)$.

解 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 作等位面 $u(x,y,z)=c$ 的垂线，交等位面 $u(x,y,z)=c+\Delta c$ 于点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则显然两等位面 $u(x_1y_1z)=c$ 和 $u(x,y,z)=u+\Delta c$ 之间的距离 $d\approx|\overrightarrow{M_0M_1}|$.

由于梯度垂直于等位面. 因此 $\operatorname{grad}u(x_0,y_0,z_0)$ 的方向与 $\overrightarrow{M_0M_1}$ 的方向或者一致或者相反. 且

$$u(x_0,y_0,z_0)=c,u(x_1,y_1,z_1)=c+\Delta c,$$

所以 $$\Delta c=u(x_1,y_1,z_1)-u(x_0,y_0,z_0)$$

$$\approx \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}(x_1-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}(y_1-y_0)$$

$$+\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}(z_1-z_0)$$

$$=[\mathrm{grad}u(x_0,y_0,z_0)]\cdot\overrightarrow{M_0M_1}$$

$$=\pm|\mathrm{grad}u(x_0,y_0,z_0)|\cdot|\overrightarrow{M_0M_1}|$$

$$=\pm|\mathrm{grad}u(x_0,y_0,z_0)|\cdot d,$$

因此 $$\mathrm{d}\approx\frac{\Delta c}{|\mathrm{grad}u(x_0,y_0,z_0)|}.$$

【4408】 证明公式：

(1) $\mathrm{grad}(u+c)=\mathrm{grad}u$（$c$ 为常数）；

(2) $\mathrm{grad}cu=c\mathrm{grad}u$（$c$ 为常数）；

(3) $\mathrm{grad}(r+v)=\mathrm{grad}u+\mathrm{grad}v$；

(4) $\mathrm{grad}uv=v\mathrm{grad}u+u\mathrm{grad}v$；

(5) $\mathrm{grad}(u^2)=2u\mathrm{grad}u$；

(6) $\mathrm{grad}f'(u)=f'(u)\mathrm{grad}u.$

证 (1) 因为

$$\frac{\partial(u+c)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial(u+c)}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial(u+c)}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z},$$

故得 $$\mathrm{grad}(u+c)=\mathrm{grad}u.$$

(2) 因为

$$\frac{\partial(cu)}{\partial x}=c\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial(cu)}{\partial y}=c\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial(cu)}{\partial z}=c\frac{\partial u}{\partial z},$$

故 $$\mathrm{grad}cu=c\mathrm{grad}u.$$

(3) 因为

$$\frac{\partial(u+v)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial(u+v)}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial(u+v)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z},$$

所以 $\quad \mathrm{grad}(u+v)=\mathrm{grad}u+\mathrm{grad}v.$

(4) $\mathrm{grad}uv=\dfrac{\partial(uv)}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial(uv)}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial(uv)}{\partial z}\vec{k}$

$$=\left(v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{uv}{\partial x}\right)\vec{i}+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{uv}{\partial y}\right)\vec{j}$$

$$+\left(v\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{uv}{\partial z}\right)\vec{k}$$

$$=v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$=v\mathrm{grad}u+u\mathrm{grad}v.$$

(5) 在(4) 中令 $u=v$ 得

$$\mathrm{grad}u^2=u\mathrm{grad}u+u\mathrm{grad}u=2u\mathrm{grad}u.$$

(6) $\mathrm{grad}f(u)=\dfrac{\partial f(u)}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f(u)}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial f(u)}{\partial z}\vec{k}$

$$=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$=f'(u)\mathrm{grad}u.$$

【4409】 计算:(1) $\mathrm{grad}r$;(2) $\mathrm{grad}r^2$;(3) $\mathrm{grad}\,\dfrac{1}{r}$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解 (1) $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r},\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r},\dfrac{\partial r}{\partial z}=\dfrac{z}{r},$

所以 $\quad \mathrm{grad}u=\dfrac{x}{r}\vec{i}+\dfrac{y}{r}\vec{j}+\dfrac{z}{r}\vec{k}=\dfrac{1}{r}\vec{r},$

其中 $\quad \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$

(2) $\mathrm{grad}r^2=2r\mathrm{grad}r=2r\cdot\dfrac{\vec{r}}{r}=2\vec{r}.$

(3) $\mathrm{grad}\,\dfrac{1}{r}=-\dfrac{1}{r^2}\mathrm{grad}r=-\dfrac{1}{r^3}\vec{r}.$

【4410】 求 $\mathrm{grad}f(r)$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解 由 4408 题(6) 及 4409 题(1) 有

$$\text{grad} f(r) = f'(r)\text{grad} r = \frac{f'(r)}{r}\vec{r}.$$

【4411】 求 $\text{grad}(\vec{c}\cdot\vec{r})$，其中 $\vec{c}$ 为固定向量，$\vec{r}$ 为从坐标原点的向量.

解 设

$$\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}, \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$\vec{c}\cdot\vec{r} = c_1x + c_2y + c_3z,$$

从而 $$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{c}\cdot\vec{r}) = c_1, \frac{\partial}{\partial y}(\vec{c}\cdot\vec{r}) = c_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\vec{c}\cdot\vec{r}) = c_3,$$

故 $$\text{grad}(\vec{c}\cdot\vec{r}) = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k} = \vec{c}.$$

【4412】 求 $\text{grad}\{|\vec{c}\times\vec{r}|^2\}$，其中 $\vec{c}$ 为固定向量.

解 设 $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$，

则 $$|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = (c_2z - c_3y)^2 + (c_3x - c_1z)^2 + (c_1y - c_2x)^2,$$

所以
$$\begin{aligned}
&\text{grad}\{|\vec{c}\times\vec{r}|^2\} \\
&= [2c_3(c_3x - c_1z) - 2c_2(c_1y - c_2x)]\vec{i} \\
&\quad + [-2c_3(c_2z - c_3y) + 2c_1(c_1y - c_2x)]\vec{j} \\
&\quad + [2c_2(c_2z - c_3y) - 2c_1(c_3x - c_1z)]\vec{k} \\
&= 2[x(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) - c_1(c_1x + c_2y + c_3z)]\vec{i} \\
&\quad + 2[y(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) - c_2(c_1x + c_2y + c_3z)]\vec{j} \\
&\quad + 2[z(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) - c_3(c_1x + c_2y + c_3z)]\vec{k} \\
&= 2(\vec{c}\cdot\vec{c})\vec{r} - 2(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{c}.
\end{aligned}$$

【4413】 证明公式：$\text{grad} f(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial u}\text{grad} u + \dfrac{\partial f}{\partial v}\text{grad} v$.

证
$$\begin{aligned}
&\text{grad} f(u,v) \\
&= \frac{\partial f(u,v)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial z}\vec{k} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\vec{j}
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{k}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{grad}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{grad}v.$$

【4414】 证明公式:$\nabla^2(uv)=u\nabla^2 v+v\nabla^2 u+2\nabla u\nabla v$,其中

$$\nabla=i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\nabla^2=\nabla\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

证 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(uv)=u\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x},$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(uv)=u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(uv)=u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z},$$

三式相加得

$$\nabla^2(uv)=u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=u\nabla^2 v+v\nabla^2 u+2\nabla u\cdot\nabla v.$$

【4415】 证明:若函数 $u=u(x,y,z)$ 在凸域 Ω 内可微分且 $|\mathrm{grad}u|\leqslant M$,其中 M 为常数,则在域 Ω 内对于任意点 A,B 有:

$$|u(A)-u(B)|\leqslant M\rho(A,B),$$

其中 $\rho(A,B)$ 表 A,B 点之间的距离.

证 由于 Ω 是凸形域,故线段$\overline{AB}$ 完全属于 Ω.设 A,B 两点的坐标分别为(x_0,y_0,z_0),$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$,由多变量函数的拉格朗日定理得

$$u(B)-u(A)$$

$$=u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-u(x_0,y_0,z_0)$$

$$= \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x}u(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y, z_0+\theta\Delta z)$$

$$+ \Delta y \cdot \frac{\partial}{\partial y}u(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y, z_0+\theta\Delta z)$$

$$+ \Delta z \cdot \frac{\partial}{\partial y}u(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y, z_0+\theta\Delta z)$$

$$= \mathrm{grad}u(C) \cdot \overrightarrow{AB},$$

其中 $0<\theta<1$,C 为点

$$C(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y, z_0+\theta\Delta z) \in AB,$$

故
$$\begin{aligned} |u(B)-u(A)| &= |\mathrm{grad}u(C) \cdot \overrightarrow{AB}| \\ &\leqslant |\mathrm{grad}u(C)| \cdot |\overrightarrow{AB}| \\ &\leqslant M\rho(A,B). \end{aligned}$$

【4415.1】 对于函数 $u=u(x,y,z)$ 给出 $\mathrm{grad}u$:(1) 在柱面坐标中;(2) 在球面坐标中.

解 (1) 在柱面坐标中

$$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=z,$$

即
$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \tan\varphi=\frac{y}{x},$$

从而
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r},$$

因此,在柱面坐标下

$$\mathrm{grad}u=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}\right)\vec{i}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}\right)\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

(2) 在球面坐标中

$$x=r\cos\varphi\sin\varphi, y=r\sin\varphi\sin\varphi, z=r\cos\varphi,$$

从而
$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tan\varphi=\frac{y}{x},$$

$$\tan\psi=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \psi}\cdot\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\varphi\sin\psi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\cos\psi}+\frac{\partial u}{\partial \psi}\cdot\frac{\cos\varphi\cos\psi}{r}.$$

同样 $$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\varphi\sin\psi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r\sin\psi}+\frac{\partial u}{\partial \psi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\psi}{r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\psi-\frac{\partial u}{\partial \psi}\cdot\frac{\sin\psi}{r},$$

因此,在球面坐标下

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}u=&\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi\sin\psi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r\sin\psi}+\frac{\partial u}{\partial \psi}\frac{\cos\varphi\cos\psi}{r}\right)\vec{i}\\&+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi\sin\psi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r\sin\psi}+\frac{\partial u}{\partial \psi}\frac{\sin\varphi\cos\psi}{r}\right)\vec{j}\\&+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\psi-\frac{\partial u}{\partial \psi}\frac{\sin\psi}{r}\right)\vec{k}.\end{aligned}$$

【4416】 求场 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 在已知点 $M(x,y,z)$ 沿这个点的向径 $\vec{r}$ 方向的导数.在什么情况下,这个导数等于梯度值?

解 设向径 $\vec{r}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,则

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\cos\beta=\frac{y}{r},\cos\gamma=\frac{z}{r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

$$=\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{x}{r}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{y}{r}+\frac{2z}{c^2}\cdot\frac{z}{r}=\frac{2u}{r}.$$

又 $$|\mathrm{grad}u|=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}},$$

当且仅当$\dfrac{u}{r}=\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}$

时 $$\frac{\partial u}{\partial r}=|\operatorname{grad}u|,$$

由此即得$\left(\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=(x^2+y^2+z^2)\left(\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}\right)$. ①

由恒等式
$$\begin{aligned}&\left(x\cdot\frac{x}{a^2}+y\cdot\frac{y}{b^2}+z\cdot\frac{z}{c^2}\right)^2\\&=(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\\&\quad-\left(x\cdot\frac{y}{b^2}-\frac{x}{a^2}y\right)^2-\left(y\cdot\frac{z}{c^2}-\frac{y}{b^2}\cdot z\right)^2\\&\quad-\left(z\cdot\frac{x}{a^2}-\frac{z}{c^2}\cdot x\right)^2,\end{aligned}$$

知只有当$a=b=c$时①式才成立，即这时方向导数等于梯度的大小.

【4417】 求场$u=\dfrac{1}{r}$(其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$)沿着$\boldsymbol{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$方向的导数. 在什么情况下这个导数等于零？

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{x}{r^3}, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{y}{r^3}, \dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{z}{r^3}$,

所以
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l}&=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\\&=-\frac{1}{r^2}\left(\frac{x}{r}\cos\alpha+\frac{y}{r}\cos\beta+\frac{z}{r}\cos\gamma\right)\\&=-\frac{1}{r^2}\cos(\vec{l},\vec{r}),\end{aligned}$$

要$\dfrac{\partial u}{\partial l}=0$,只要$\cos(\vec{l},\vec{r})=0$,即$\vec{l}\perp\vec{r}$.

【4418】 求场$u=u(x,y,z)$在场$v=v(x,y,z)$的梯度方向上的导数. 在什么情况下这个导数将等于零？

解 $\vec{l}=\operatorname{grad}v, \vec{l}_0=\dfrac{\operatorname{grad}v}{|\operatorname{grad}v|}$,

于是 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial l}=\operatorname{grad}u\cdot\vec{l}_0=\dfrac{\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v}{|\operatorname{grad}v|}$,

要$\dfrac{\partial u}{\partial l}=0$,只要 $\operatorname{grad}u\perp\operatorname{grad}v$,此即所求之解.

【4419】 若

$$u=\arctan\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\text{ 且 }c=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},$$

写出单位向量中的向量场$\vec{a}=\vec{c}\times\operatorname{grad}u$.

解 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{z^2}{x^2+y^2}}\left(-\dfrac{xz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$

$$=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\vec{a}=\vec{c}\times\operatorname{grad}u=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\\dfrac{\partial u}{\partial x}&\dfrac{\partial u}{\partial y}&\dfrac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\-xz&-yz&x^2+y^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}[(x^2+y^2+yz)\vec{i}$$

$$-(x^2+y^2+xz)\vec{j}+(x-y)z\vec{k}].$$

【4420】 确定向量场 $a=x\vec{i}+y\vec{j}+2z\vec{k}$ 的力线.

解 力线是这样的一条曲线 C,在 C 上每点的切线与向量场在该点的方向重合.因此 $\mathrm{d}\vec{r}\,/\!/\,\vec{a}$,即力线的微分方程为

$$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{dz}{a_z},$$

其中 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}a_z\vec{k}$,

亦即 $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{2z}$,

解之得 $y=c_1x, z=c_2x^2$.

【4421】 用直接计算证明,向量 $\vec{a}$ 散度与直角坐标系的选择无关.

证 设有两直角坐标系 $Oxyz$(坐标轴方向的单位向量为 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) 及 $Ox'y'z'$(坐标轴方向的单位向量为 $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$),

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=a'_x\vec{i}'+a'_y\vec{j}'+a'_z\vec{k}'.$$

我们要证

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\frac{\partial a'_x}{\partial x'}+\frac{\partial a'_y}{\partial y'}+\frac{\partial a'_z}{\partial z'},$$

设

$$\begin{cases}\vec{i}'=\cos\alpha_1\vec{i}+\cos\beta_1\vec{j}+\cos\gamma_1\vec{k}\\ \vec{j}'=\cos\alpha_2\vec{i}+\cos\beta_2\vec{j}+\cos\gamma_2\vec{k},\\ \vec{k}'=\cos\alpha_3\vec{i}+\cos\beta_3\vec{j}+\cos\gamma_3\vec{k}\end{cases}$$

又设 $\vec{r}_0=\overrightarrow{OO'}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$,

$$\vec{r}=\overrightarrow{OP}, \vec{r}'=\overrightarrow{O'P},$$

于是,空间中一点 P 在两个坐标系中的坐标 (x,y,z) 与 (x',y',z') 之间关系为

$$\begin{aligned}x'&=\vec{r}'\cdot\vec{i}'=(\vec{r}-\vec{r_0})\cdot\vec{i}'\\&=(x-a)\cos\alpha_1+(y-b)\cos\beta_1+(z-c)\cos\gamma_1,\\ y'&=\vec{r}'\cdot\vec{j}'=(\vec{r}-\vec{r_0})\vec{j}'\\&=(x-a)\cos\alpha_2+(y-b)\cos\beta_2+(z-c)\cos\gamma_2,\\ z'&=\vec{r}'\cdot\vec{k}'=(\vec{r}-\vec{r_0})\vec{k}'\\&=(x-a)\cos\alpha_3+(y-b)\cos\beta_3+(z-c)\cos\gamma_3,\end{aligned}$$

又 $\vec{a} = a'_x \vec{i}' + a'_y \vec{j}' + a_z' \vec{k}$

$$= a'_x (\cos\alpha_1 \vec{i} + \cos\beta_1 \vec{j} + \cos\gamma_1 \vec{k})$$
$$+ a_y' (\cos\alpha_2 \vec{i} + \cos\beta_2 \vec{j} + \cos\gamma_2 \vec{k})$$
$$+ a_z' (\cos\alpha_3 \vec{i} + \cos\beta_3 \vec{j} + \cos\gamma_3 \vec{k}).$$

由此可知

$$a_x = a_x' \cos\alpha_1 + a_y' \cos\alpha_2 + a_z' \cos\alpha_3,$$
$$a_y = a_x' \cos\beta_1 + a_y' \cos\beta_2 + a_z' \cos\beta_3,$$
$$a_z = a_x' \cos\gamma_1 + a_y' \cos\gamma_2 + a_z' \cos\gamma_3,$$

于是 $$\frac{\partial a_x}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial x}$$

$$= \left(\frac{\partial a_x'}{\partial x'} \cos\alpha_1 + \frac{\partial a_y'}{\partial x'} \cos\alpha_2 + \frac{\partial a_y'}{\partial x'} \cos\alpha_3\right) \cos\alpha_1$$
$$+ \left(\frac{\partial a_x'}{\partial y'} \cos\alpha_1 + \frac{\partial a_y'}{\partial y'} \cos\alpha_2 + \frac{\partial a_y'}{\partial y'} \cos\alpha_3\right) \cos\alpha_2$$
$$+ \left(\frac{\partial a_x'}{\partial z'} \cos\alpha_1 + \frac{\partial a_y'}{\partial z'} \cos\alpha_2 + \frac{\partial a_y'}{\partial z'} \cos\alpha_3\right) \cos\alpha_3.$$

同样,可得

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = \left(\frac{\partial a_x'}{\partial x'} \cos\beta_1 + \frac{\partial a_y'}{\partial x'} \cos\beta_2 + \frac{\partial a_z'}{\partial x'} \cos\beta_3\right) \cos\beta_1$$
$$+ \left(\frac{\partial a_x'}{\partial y'} \cos\beta_1 + \frac{\partial a_y'}{\partial y'} \cos\beta_2 + \frac{\partial a_z'}{\partial y'} \cos\beta_3\right) \cos\beta_2$$
$$+ \left(\frac{\partial a_x'}{\partial z'} \cos\beta_1 + \frac{\partial a_y'}{\partial z'} \cos\beta_2 + \frac{\partial a_z'}{\partial z'} \cos\beta_3\right) \cos\beta_3.$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial a_x'}{\partial x'} \cos\gamma_1 + \frac{\partial a_y'}{\partial x'} \cos\gamma_2 + \frac{\partial a_z'}{\partial x'} \cos\gamma_3\right) \cos\gamma_1$$
$$+ \left(\frac{\partial a_x'}{\partial y'} \cos\gamma_1 + \frac{\partial a_y'}{\partial y'} \cos\gamma_2 + \frac{\partial a_z'}{\partial y'} \cos\gamma_3\right) \cos\gamma_2$$
$$+ \left(\frac{\partial a_x'}{\partial z'} \cos\gamma_1 + \frac{\partial a_y'}{\partial z'} \cos\gamma_2 + \frac{\partial a_z'}{\partial z'} \cos\gamma_3\right) \cos\gamma_3.$$

将上面三式相加得

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = (\vec{i}' \cdot \vec{i}') \frac{\partial a_x'}{\partial x'}$$

$$+(\vec{i'}\cdot\vec{j'})\frac{\partial a_y'}{\partial x'}+(\vec{k'}\cdot\vec{i'})\frac{\partial a_y'}{\partial x'}+(\vec{i'}\cdot\vec{j'})\frac{\partial a_x'}{\partial y'}$$

$$+(\vec{j'}\cdot\vec{j'})\frac{\partial a_y'}{\partial y'}+(\vec{k'}\cdot\vec{i'})\frac{\partial a_z'}{\partial y'}+(\vec{i'}\cdot\vec{k'})\frac{\partial a_x'}{\partial z'}$$

$$+(\vec{j'}\cdot\vec{k'})\frac{\partial a_y'}{\partial z'}+(\vec{k'}\cdot\vec{k'})\frac{\partial a_z'}{\partial z'}$$

$$=\frac{\partial a_x'}{\partial x'}+\frac{\partial a_y'}{\partial y'}+\frac{\partial a_z'}{\partial z'}.$$

【4422】 证明:$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\lim\limits_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iint\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS$,其中 S 为围绕 M 点并围成体积 V 的封闭曲面. $\vec{n}$ 为曲面 S 的外法线;$d(S)$ 为曲面 S 的直径.

证 设

$$\vec{n}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k},$$

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}.$$

则 $$\vec{a}\cdot\vec{n}=a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma.$$

利用奥氏公式及积分中值定理可得

$$\iint\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=\iint\limits_S (a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)dS$$

$$=\iiint\limits_v\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_v(\operatorname{div}\vec{a})dxdydz=\operatorname{div}\vec{a}(M_1)\cdot V,$$

其中 M_1 是 V 中的一点,即

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_1)=\frac{1}{V}\iint\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS.$$

令 $d(S)\to 0$,则 $M_1\to M$,因此

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\lim_{d(S)\to 0}\operatorname{div}\vec{a}(M_1)=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iint\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS.$$

【4422.1】 求场 $\vec{a}=\dfrac{-\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点 $M(3,4,5)$ 的散

度.通过无穷小球面$(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=\varepsilon^2$的向量$\vec{a}$的流量$\Pi$近似地等于多少?

证 $$\frac{\partial a_x}{\partial x}=\frac{-2x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial y}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{\partial a_z}{\partial z}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

所以 $$\mathrm{div}\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=0,$$

故 $$\mathrm{div}\vec{a}(M)=0,$$

因此流量

$$\Pi=\iint_S\vec{a}\cdot\vec{n}dS=\iiint_v\mathrm{div}\vec{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

【4423】 求

$$\mathrm{div}\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\partial}{\partial_y} & \frac{\partial}{\partial_z}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\end{vmatrix}.$$

解 $$\mathrm{div}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}$$

$$=\mathrm{div}\left[\left(\frac{\partial w_z}{\partial y}-\frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial w_y}{\partial x}-\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w_z}{\partial y}-\frac{\partial w_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w_y}{\partial x}-\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)$$

$$=0.$$

【4424】 证明:(1) $\mathrm{div}(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{div}\vec{a}+\mathrm{div}\vec{b}$;(2) $\mathrm{div}(u\vec{c})=\vec{c}\mathrm{drad}u$($\vec{c}$为固定向量,$u$为纯量)(3) $\mathrm{div}(u\vec{a})=u\mathrm{div}\vec{a}+\vec{a}\mathrm{grad}u$.

证 (1) 设

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b})&=\frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial x}+\frac{\partial(a_y+b_y)}{\partial y}+\frac{\partial(a_z+b_z)}{\partial z}\\&=\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}+\frac{\partial b_z}{\partial z}\right)\\&=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}.\end{aligned}$$

(2) 设 $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$.

则 $$u\vec{c}=c_xu\vec{i}+c_yu\vec{j}+c_zu\vec{k}.$$

从而 $$\begin{aligned}\operatorname{div}(u\vec{c})&=\frac{\partial(c_xu)}{\partial x}+\frac{\partial(c_yu)}{\partial y}+\frac{\partial(c_zu)}{\partial z}\\&=c_x\frac{\partial u}{\partial x}+c_y\frac{\partial u}{\partial y}+c_z\frac{\partial u}{\partial z}=\vec{c}\cdot\operatorname{grad}u.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\operatorname{div}(u\vec{a})&=\frac{\partial(ua_x)}{\partial x}+\frac{\partial(ua_y)}{\partial y}+\frac{\partial(ua_z)}{\partial z}\\&=\left(u\cdot\frac{\partial a_x}{\partial x}+a_x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\left(u\cdot\frac{\partial a_y}{\partial y}+a_y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&\quad+\left(u\cdot\frac{\partial a_z}{\partial z}+a_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&=u\cdot\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\\&\quad+\left(a_x\frac{\partial u}{\partial x}+a_y\frac{\partial u}{\partial y}+a_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&=u\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\cdot\operatorname{grad}\vec{u}.\end{aligned}$$

【4425】 求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)$.

解 $$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u.\end{aligned}$$

【4426】 求 $\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 在什么情况下 $\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]=0$?

解 由 4410 题的结果知

$$\operatorname{grad}f(r)=f'(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r},$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{r}f'(r)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{r}f'(r)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{r}f'(r)\right]\\
&=\frac{3f'(r)}{r}+f''(r)\left[\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}\right]\\
&\quad+f'(r)\left[-\frac{x^2}{r^3}-\frac{y^2}{r^3}-\frac{z^2}{r^3}\right]\\
&=\frac{2f'(r)}{r}+f''(r).
\end{aligned}$$

当$\frac{2f'(r)}{r}+f''(r)=0$时，

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]=0.$$

令 $f'(r)=u$,则

$$\frac{2u}{r}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=0,$$

即 $$\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\frac{2\mathrm{d}r}{r},$$

积分得 $$\ln u=\ln\frac{c_1}{r^2},$$

即 $$f'(r)=\frac{c_1}{r^2},$$

故得 $$f(r)=-\frac{c_1}{r}+c_2,$$

其中,c_1,c_2 为常数,故当

$$f(r)=-\frac{c_1}{r}+c_2,\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]=0.$$

【4427】 计算:(1) $\operatorname{div}\vec{r}$;(2) $\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r}$.

解 (1) 由于

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},$$

故有 $\quad \operatorname{div}\vec{r}=\dfrac{\partial x}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial z}=3.$

(2)
$$\begin{aligned}\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)\\&=\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right)\\&=\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}=\frac{3}{r}-\frac{1}{r}=\frac{2}{r}.\end{aligned}$$

【4428】 计算 $\operatorname{div}[f(r)\vec{c}]$，其中 $\vec{c}$ 为固定向量.

解 由 4426 题及 4410 题的结果有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}[f(r)\vec{c}]&=\vec{c}\cdot\operatorname{grad}f(r)=\vec{c}\cdot f'(r)\frac{\vec{r}}{r}\\&=\frac{f'(r)}{r}(\vec{c}\cdot\vec{r}).\end{aligned}$$

【4429】 求 $\operatorname{div}[f(r)\vec{r}]$. 在什么情况下这个向量的散度等于零?

解 利用 4424 及 4410 题的结果得

$$\begin{aligned}\operatorname{div}[f(r)\vec{r}]&=f(r)\operatorname{div}\vec{r}+\vec{r}\cdot\operatorname{grad}f(r)\\&=3f(r)+\vec{r}\cdot\frac{f'(r)}{r}\vec{r}\\&=3f(r)+rf'(r).\end{aligned}$$

当 $3f(r)+rf'(r)=0$ 时，$\operatorname{div}[f(r)\vec{r}]=0$.

由 $3f(r)+rf'(r)=0$，得 $\dfrac{f'(r)}{f(r)}=-\dfrac{3}{r}$，积分得

$$\ln f(r)=\ln\frac{c}{r^3}\qquad (c\ \text{为常数}),$$

故当 $f(r)=\dfrac{c}{r^3}$ 时，$\operatorname{div}[f(r)\vec{r}]=0$.

【4430】 求(1) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u)$；(2) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)$.

解 (1) 由 4424 题及 4425 题的结果有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u)&=u\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)+\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}u\\&=u\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)+|\operatorname{grad}u|^2.\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}v) = u\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}v) + \mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}v$

$$= u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}v.$$

【4431】 某物体围绕 Oz 轴以固定的角速度 ω 逆时针方向旋转. 求在给定时刻速度向量 $\vec{v}$ 和加速度向量 $\vec{w}$ 在空间的点 $M(x,y,z)$ 的散度.

解 如果将角速度用一个向量 $\vec{\omega}$ 来表示则

$$\vec{\omega} == 0\vec{i} + 0\vec{j} + \omega\vec{k}.$$

设 $\vec{r}$ 表示由原点到 $M(x,y,z)$ 的向径,则

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

由 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$,故

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j},$$

因而 $\quad v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega y, v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega x, v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0,$

又加速度

$$\vec{w} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\omega\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \omega\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{j} = -\omega^2 x\vec{i} - \omega^2 y\vec{j},$$

$$\mathrm{div}\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) = 0,$$

$$\mathrm{div}\vec{w} = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega^2 x) + \frac{\partial}{\partial y}(-\omega^2 y) = -2\omega^2.$$

【4432】 求解由引力中心的有限系统形成的力场的分散度.

解 引力

$$\vec{F} = \frac{k\vec{r}}{r^3} \quad (k \text{ 为常数}),$$

所以 $\quad \mathrm{div}\vec{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{kx}{r^3}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{ky}{r^3}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{kz}{r^3}\right)$

$$= k\left[\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)\right]$$

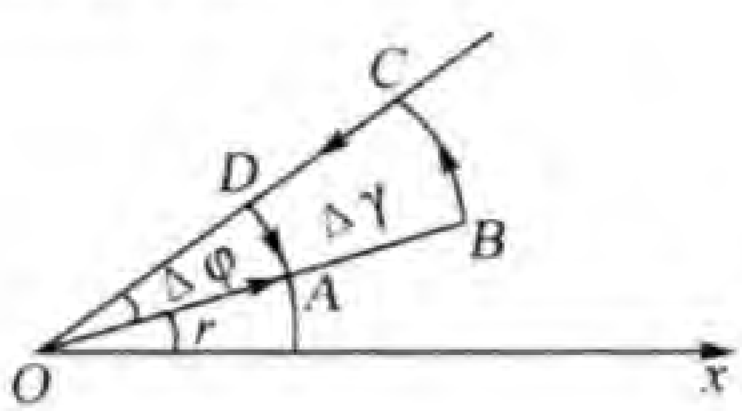
$$=k\left[\frac{3}{r^3}-3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5}\right]=0.$$

【4433】 求在极坐标 r 和 φ 中平面向量 $\vec{a}=\vec{a}(r,\varphi)$ 的散度的表达式.

证 对平面向量 $\vec{a}$,有

$$\mathrm{div}\vec{a}=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{S}\int_{\Gamma}\vec{a}\cdot\vec{n}dS, \qquad ①$$

其中 S 为封闭曲线 Γ 所围的平面域,取 Γ 为正向圆扇形的周界 $ABCD$ 如 4433 题图所示,则



4433 题图

$$S=\frac{1}{2}[(r+\Delta r)^2\Delta\varphi-r^2\Delta\varphi]=\left(r+\frac{1}{2}\Delta r\right)\Delta r\Delta\varphi,$$

设 $$\vec{a}=a_r(r,\varphi)\vec{e}r+a_\varphi(r,\varphi)\vec{e}\varphi,$$

其中 $\vec{e}_r$ 和 $\vec{e}_\varphi$ 分别是 r 方向和 φ 方向的单位向量,这里假定 $a_r(r,\varphi)$,$a_\varphi(r,\varphi)$ 都具有连续的偏导数. 向量 $\vec{a}$ 通过 BC 和 DA 的流量为

$$\int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi}a_r(r+\Delta r,\varphi)(r+\Delta r)\mathrm{d}\varphi-\int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi}a_r(r,\varphi)r\mathrm{d}\varphi$$
$$=\int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi}[a_r(r+\Delta r,\varphi)(r+\Delta r)-a_r(r,\varphi)r]\mathrm{d}\varphi$$
$$=[a_r(r+\Delta r,\varphi_1)(r+\Delta r)-a_r(r,\varphi_1)r]\Delta\varphi$$
$$=\frac{\partial}{\partial r}[ra_r(r,\varphi)]_{m1}\Delta r\Delta\varphi,$$

上面分别用到积分中值定理,与微分中值定理其中 $M_1(r_1,\varphi_1)$ 为 Γ 内的一点,即

$$\varphi\leqslant\varphi_1\leqslant\varphi+\Delta\varphi, r\leqslant r_1\leqslant r+\Delta r,$$

同样利用积分中值定理与微分中值定理可得向量流过曲线 AB 和 CD 的流量为

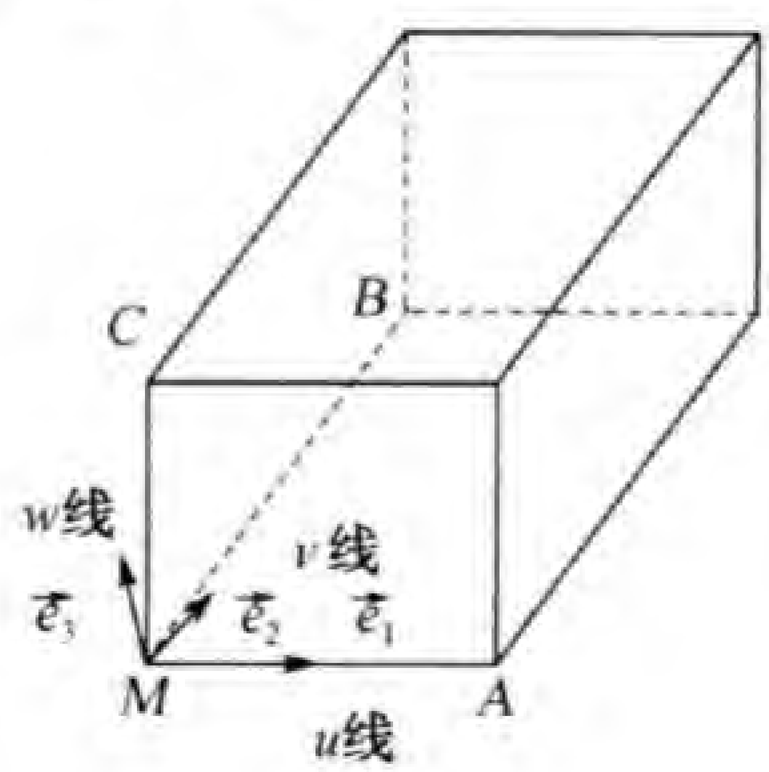
$$-\int_r^{r+\Delta r} a_\varphi(r,\varphi)\mathrm{d}r+\int_r^{r+\Delta r} a_\varphi(r,\varphi+\Delta\varphi)\mathrm{d}r$$
$$=\int_r^{r+\Delta r}[a_\varphi(r,\varphi+\Delta\varphi)-a_r(r,\varphi)]\mathrm{d}r$$
$$=[a_\varphi(r_2,\varphi+\Delta\varphi)-a_r(r_2\varphi)]\Delta r$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}a_\varphi(r,\varphi)\right]\Big|_{M2}\Delta\varphi\Delta r,$$

其中 $M_2(r_2,\varphi_2)$ 为 Γ 内的一点.

将所得结果代入 ① 得

$$\mathrm{div}\vec{a}=\lim_{\substack{\Delta r\to0\\\Delta\varphi\to0}}\frac{1}{\left(r+\frac{1}{2}\Delta r\right)\Delta r\Delta\varphi}\left\{\frac{\partial}{\partial r}[ra_r(r,\varphi)]\mathrm{M}_1\Delta r\Delta\varphi\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\varphi}a_\varphi(r,\varphi)\Big|\mathrm{M}_2\Delta r\Delta\varphi\right\}$$
$$=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}[ra_r(r,\varphi)]+\frac{\partial}{\partial\varphi}a_\varphi(r,\varphi)\right\}$$
$$=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(ra_r)}{\partial r}+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right].$$

【4434】 若 $x=f(u,v,w),y=g(u,v,w),z=h(u,v,w)$,在正交曲线坐标中表示出 $\mathrm{div}a(x,y,z)$. 作为特殊情况,在柱坐标和球坐标中得出 $\mathrm{div}a$ 的表达式.



4434 题图

提示:研究通过无限小的由曲面 $u=\mathrm{const},v=\mathrm{const},w=\mathrm{const}$ 围成的平行六面体的向量$\vec{a}$ 流量.

证 考虑向量 $\vec{a}$ 通过由曲面 $u=$ 常数，$v=$ 常数，$w=$ 常数所围的小立体 V 的表面 S 的流量.

设 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 分别表示 u 曲线，v 曲线，w 曲线上的单位向量则 $\vec{a}$ 可表示为

$$\vec{a}=a_u\vec{e}_1+a_v\vec{e}_2+a_w\vec{e}_3,$$

设 MA,MB,MC 分别表示 u 曲线，v 曲线和 w 曲线.

在 u 曲线上，$v=$ 常数，$w=$ 常数，只有 u 在变化

因此，它的参数方程为

$$x=f(u,v,w),y=g(u,v,w),z=h(u,v,w),$$

其中 v 和 w 固定. 由此可得 MA 的方向数为 $\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial g},\frac{\partial h}{\partial u}$.

同理，MB 的方向数为 $\frac{\partial f}{\partial v},\frac{\partial g}{\partial v},\frac{\partial h}{\partial v}$,

MC 的方向数为 $\frac{\partial f}{\partial w},\frac{\partial g}{\partial w},\frac{\partial h}{\partial w}$.

据假设 u,v,w 为直交曲线坐标系，故有

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial h}{\partial v}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial w}+\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial w}+\frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial h}{\partial w}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial w}+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial g}{\partial w}+\frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial h}{\partial w}=0,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v+\frac{\partial f}{\partial w}\mathrm{d}w\right)^2\\&\quad+\left(\frac{\partial g}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial g}{\partial v}\mathrm{d}v+\frac{\partial g}{\partial w}\mathrm{d}w\right)^2\\&\quad+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial h}{\partial v}\mathrm{d}v+\frac{\partial h}{\partial w}\mathrm{d}w\right)^2.\end{aligned}$$

利用直交条件可得

$$ds^2=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2\right]\mathrm{d}u^2$$

$$+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right]dv^2$$

$$+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2+\right]dw^2$$

$$=\left[L^2du^2+M^2dv^2+N^2dw^2\right],$$

其中 $$L=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2},$$

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2},$$

$$N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2},$$

若以 ds_1, ds_2, ds_3 分别表示 u 曲线，v 曲线和 w 曲线上的弧微数分元素，则 $ds_1^2 = L^2du^2$，即 $ds_1 = Ldu$，

同理

$$ds_2 = Mdv, ds_3 = Ndw,$$

故由 v 曲线和 w 曲线所组成的面积元素为

$$dS_1 = ds_2ds_3 = MNdvdw,$$

由 u 曲线和 w 曲线所组成的面积元素为

$$dS_2 = ds_1ds_3 = LNdudw,$$

由 u 曲线和 v 曲线所组成的面积元素为

$$dS_3 = ds_1ds_2 = LMdudv,$$

又由坐标曲线所组成的立体的体积元素为

$$dv = ds_1ds_2ds_3 = LMNdudvdw,$$

故 $$V=\int_u^{u+\Delta u}\int_v^{v+\Delta v}\int_w^{w+\Delta w}LMN\,dudvdw$$

$$=(LMN)\big|_{P_1}\Delta u\Delta v\Delta w,$$

其中 P_1 为立体内的一点，$\vec{a}$ 流过两张 u 坐标面的流量为

$$\int_v^{v+\Delta v}\int_w^{w+\Delta w}(a_uMN)_{(}u+\Delta u,v,w)dvdw$$

$$-\int_v^{v+\Delta v}\int_w^{w+\Delta w}(a_uMN)_{(}u,v,w)dvdw$$

$$=\int_{v}^{v+\Delta v}\int_{w}^{w+\Delta w}\frac{\partial}{\partial u}(a_uMN)_{P'_2}\Delta u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}(a_uMN)_{P_2}\Delta u\Delta v\Delta w,$$

其中 P'_2，P_2 都是立体内的点.

同理，流过两张 v 坐标面和两张 w 坐标面的流量分别为

$$\frac{\partial}{\partial v}(a_vLN)P_3\Delta u\Delta v\Delta w,\frac{\partial}{\partial w}(a_wLM)P_4\Delta u\Delta v\Delta w,$$

其中 P_3，P_4 都是立体内的点.

$$\text{因此}\operatorname{div}\vec{a}=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{v}\iint_S\vec{a}\cdot\vec{n}\mathrm{dS}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0\\ \Delta w\to 0}}\frac{1}{(LMN)P_1}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_uMN)P_2+\frac{\partial}{\partial v}(a_vLN)P_3+\frac{\partial}{\partial w}(a_wLM)P_4\right]$$

$$=\frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_uMN)+\frac{\partial}{\partial v}(a_vLN)+\frac{\partial}{\partial w}(a_wLM)\right].$$

特别地在柱面坐标下，有

$$x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi,z=z,$$

从而 $$L=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}=1,$$

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}=r,$$

$$N=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2}=1,$$

所以 $$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r)+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right].$$

在球面坐标下，有

$$x=\rho\cos\varphi\sin\psi,y=\rho\sin\varphi\sin\psi,z=\rho\cos\psi,$$

所以 $$L=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2}=1,$$

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}=\rho\sin\psi,$$

$$N=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2}=\rho,$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{a}&=\frac{1}{\rho^2\sin\psi}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(a_\rho\rho^2\sin\psi)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(a_\varphi\rho)+\frac{\partial}{\partial\psi}(a_\psi\rho\sin\psi)\right]\\&=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(a_\rho\rho^2)+\frac{1}{\rho\sin\psi}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}(a_\psi\sin\psi).\end{aligned}$$

【4435】 证明:(1) $\mathbf{rot}(\vec{a}+\vec{b})=\mathbf{rot}\vec{a}+\mathbf{rot}\vec{b}$;(2) $\mathbf{rot}(u\vec{a})=u\mathbf{rot}\vec{a}+\mathbf{grad}(u\times\vec{a})$.

证 设

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}.$$

则有

$$\begin{aligned}(1)\ \mathbf{rot}(\vec{a}+\vec{b})&=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\a_x+b_x&a_y+b_y&a_z+b_z\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}\\&=\mathbf{rot}\vec{a}+\mathbf{rot}\vec{b}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\ \{\mathbf{rot}(u\vec{a})\}_x=\mathbf{rot}_x(u\vec{a})&=\frac{\partial}{\partial y}(ua_z)-\frac{\partial}{\partial z}(ua_y)\\&=u\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}a_z-\frac{\partial u}{\partial z}a_y\right)\\&=u\mathbf{rot}_x\vec{a}+\{\mathbf{grad}u\times\vec{a}\}_x.\end{aligned}$$

同理可得 $\mathbf{rot}_y(u\vec{a})=u\mathbf{rot}_y\vec{a}+\{\mathbf{grad}u\times\vec{a}\}_y$,

$$\mathbf{rot}_z(u\vec{a})=u\mathbf{rot}_z\vec{a}+\{\mathbf{grad}u\times\vec{a}\}_z.$$

因此 $\mathbf{rot}(u\vec{a}) = u\mathbf{rot}\vec{a} + \mathbf{grad}u \times \vec{a}$.

【4436】 求:(1) $\mathbf{rot}\vec{r}$;(2) $\mathbf{rot}[f(r)\vec{r}]$.

解 (1) $\vec{r} = x\vec{i} + g\vec{j} + z\vec{k}$,

所以 $$\mathbf{rot}\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

(2) 由 4435 题(2) 和 4410 题的结果得

$$\mathbf{rot}(f(r)\vec{r}) = f(r)\mathbf{rot}\vec{f} + \mathbf{grad}f(r) \times \vec{r}$$
$$= 0 + \frac{f'(r)}{r}\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}.$$

【4436.1】 若$\vec{a} = \frac{y}{z}\vec{i} + \frac{z}{x}\vec{j} + \frac{x}{y}\vec{k}$,求 $\mathbf{rot}\,\vec{a}$ 在$M(1,2,-2)$点上的数值和方向.

解 $\vec{a} = \frac{y}{z}\vec{i} + \frac{z}{x}\vec{j} + \frac{x}{y}\vec{k}$,

则 $$\mathbf{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{z} & \frac{z}{x} & \frac{x}{y} \end{vmatrix}$$
$$= \left(-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right)\vec{i} + \left(-\frac{y}{z^2} - \frac{1}{y}\right)\vec{j} + \left(-\frac{z}{x^2} - \frac{1}{z}\right)\vec{k},$$

故 $$\mathbf{rot}\vec{a}(1,2,-2) = -\frac{5}{4}\vec{i} - \vec{j} + \frac{5}{2}\vec{k},$$

$$|\mathbf{rot}\vec{a}(1,2,-2)| = \frac{\sqrt{141}}{4},$$

方向为 $\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{141}}, \cos\beta = -\frac{4}{\sqrt{141}},$

$$\cos\gamma = \frac{10}{\sqrt{141}}.$$

【4437】 求(1) $\mathbf{rot}\vec{c}f(r)$；(2) $\mathbf{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}]$($c$ 为固定向量).

解 (1) 由 4435 题及 4410 题得

$$\mathbf{rot}[\vec{c}f(r)]=f(r)\mathbf{rot}\vec{c}+\mathbf{grad}f(r)\times\vec{c}$$
$$=\frac{f'(r)}{r}(\vec{r}\times\vec{c}).$$

(2) $\mathbf{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}]$

$$=f(r)\mathbf{rot}(\vec{c}\times\vec{r})+\mathbf{grad}f(r)\times(\vec{c}\times\vec{r})$$
$$=f(r)\mathbf{rot}(\vec{c}\times\vec{r})+\frac{f'(r)}{r}[\vec{r}\times(\vec{c}\times\vec{r})],$$

而
$$\mathbf{rot}(\vec{c}\times\vec{r})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ c_yz-c_zy&c_zx-c_xz&c_xy-c_yx\end{vmatrix}$$
$$=2(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k})=2\vec{c}.$$

又由恒等式 $\vec{a}_1\times(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)=(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_3)\vec{a}_2-(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)\vec{a}_3$,

得 $\qquad \vec{r}\times(\vec{c}\times\vec{c})=(\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{c}-(\vec{r}\cdot\vec{c})\vec{r}.$

因此 $\qquad \mathbf{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}]$

$$=2f(r)\vec{c}+\frac{f'(r)}{r}[(\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{c}-(\vec{r}\cdot\vec{c})\vec{r}].$$

【4438】 证明：$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\mathbf{rot}\,\vec{a}-\vec{a}\cdot\mathbf{rot}\,\vec{b}.$

证
$$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\frac{\partial}{\partial x}(a_yb_z-a_zb_y)+\frac{\partial}{\partial y}(a_zb_x-a_xb_z)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}(a_xb_y-a_yb_x)$$
$$=b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)$$
$$+b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)-a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)$$
$$-a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)-a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)$$

$$=\vec{b}\cdot\mathbf{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\mathbf{rot}\vec{b}.$$

【4439】 求(1) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}u)$;(2) $\mathrm{div}(\mathbf{rot}\,\vec{a})$.

解 (1) $$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}u)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=\vec{0}.$$

(2) $$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{rot}\vec{a})&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\\&\quad+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\\&=0.\end{aligned}$$

【4440】 某物体围绕轴$\vec{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$以固定的角速度$\omega$旋转.求在给定时刻在空间点$M(x,y,z)$的速度向量$\vec{v}$的旋度.

解 物体绕轴$\vec{l}$旋转,它的角速度可以用一个向量$\vec{\omega}$来表示,$\vec{\omega}$的大小等于ω,而方向与$\vec{l}$一致,故

$$\vec{\omega}=\omega\vec{l}=\omega(\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}),$$

设点M的向径为$\vec{r}$,即$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$,

则 $$\begin{aligned}\vec{v}&=\vec{\omega}\times\vec{r}\\&=\omega[(z\cos\beta-y\cos\gamma)\vec{i}+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)\vec{j}\\&\quad+(y\cos\alpha-x\cos\beta)\vec{k}]\end{aligned}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \omega(z\cos\beta-y\cos\gamma) & \omega(x\cos\gamma-z\cos\alpha) & \omega(y\cos\alpha-x\cos\beta)\end{vmatrix}$$

$$=2\vec{\omega}.$$

【4440.1】 求在极坐标r和φ中平面向量$a=a(r,\varphi)$旋度的表达式.

解 可将此题看成4440.2题(1)的特殊情况.

设

$$\vec{a}=a_r\vec{e}_r+a_\varphi\vec{e}_\varphi+a_z\vec{e}_z,$$

其中 $a_z\equiv 0,a_r,a_\varphi$ 与 z 无关. 故由 4440.2 题(1) 的结论有

$$\mathrm{rot}\vec{a}=\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right]\vec{k}.$$

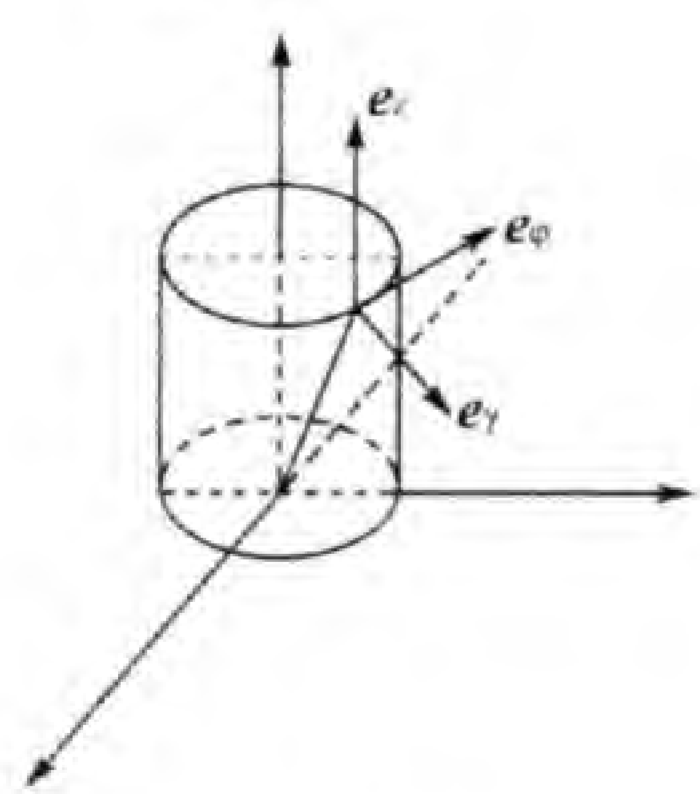
【4440.2】 求 rot $\vec{a}(x,y,z)$. (1) 在柱体坐标中;(2) 在球坐标中.

解 (1) 我们首先设

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}.$$

则
$$\mathrm{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}=\nabla\times\vec{a},$$

其中
$$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$



4440.2 题图

柱面坐标变换为

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\\ z=z.\end{cases}$$

设 $M(x,y,z)$ 是空间中任意一点,它在直角坐标系下可表示为

$$\overrightarrow{OM}=\vec{\rho}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},$$

于是有 $\dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial r}=\dfrac{\partial x}{\partial r}\vec{i}+\dfrac{\partial y}{\partial r}\vec{j},\dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\vec{i}+\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\vec{j},$

$$\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial z}=\vec{k}.$$

第一式的几何意义是：该向量是曲线$\begin{cases}x=r\cos\varphi_0\\ y=r\sin\varphi_0\\ z=z_0\end{cases}$的切向量. 其中 φ_0,z_0 为固定的常数.

类似地，第二，三式分别是曲线

$$\begin{cases}x=r_0\cos\varphi,\\ y=r_0\sin\varphi,\\ z=z_0,\end{cases}\qquad\begin{cases}x=r_0\cos\varphi_0,\\ y=r_0\sin\varphi_0,\\ z=z.\end{cases}$$

的切向量. 将上述三个切向量上的单位向量分别记作 $\vec{e}_r,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z$，

则有
$$\vec{e}_r=\frac{\dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial r}}{\left|\dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial r}\right|}=\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j},$$

$$\vec{e}_\varphi=\frac{\dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial\varphi}}{\left|\dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial\varphi}\right|}=-\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j},$$

$$\vec{e}_z=\vec{k}.$$

又
$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\varphi,\frac{\partial r}{\partial y}=\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{r},\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\cos\varphi}{r},$$

所以
$$\begin{aligned}\nabla&=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\\&=\vec{i}\left(\cos\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\&\quad+\vec{j}\left(\sin\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

$$= (\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j})\frac{\partial}{\partial r}$$

$$+ (-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j})\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

再设 $\quad \vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_\varphi,$

注意到 $\vec{e}_r,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z$ 是活动坐标架的单位向量,它们也是 r,φ,z 的函数,并且

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = \vec{e}_\varphi, \frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\vec{e}_r,$$

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial r} = \frac{\partial\vec{e}_z}{\partial r} = \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial z} = \frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\vec{e}_z}{\partial z} = \frac{\partial\vec{e}_z}{\partial\varphi} = 0,$$

因此 $\quad \mathrm{rot}\vec{a} = \nabla\times\vec{a}$

$$= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$+ \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_z.$$

(2) 球面坐标变换为

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, y = r\sin\varphi\cos\psi, z = r\sin\psi.$$

设 $M(x,y,z)$ 是空间中任意一点,它在直角坐标系下可表示为

$$\overrightarrow{OM} = \vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

于是有 $\quad \dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial r} = \dfrac{\partial x}{\partial r}\vec{i} + \dfrac{\partial y}{\partial r}\vec{j} + \dfrac{\partial z}{\partial r}\vec{k}$

$$= \cos\varphi\cos\psi\vec{i} + \sin\varphi\cos\psi\vec{j} + \sin\psi\vec{k},$$

$$\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial\varphi} = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\vec{k}$$

$$= r(-\sin\varphi\cos\psi\vec{i} + \cos\varphi\cos\psi\vec{j} + 0\cdot\vec{k}),$$

$$\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial\psi} = r(-\cos\varphi\sin\psi\vec{i} - \sin\varphi\sin\psi\vec{j} + \cos\psi\vec{k}),$$

和前题一样可得

$$\vec{e}_r=\frac{\dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial r}}{\left|\dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial r}\right|}=\cos\varphi\cos\psi\vec{i}+\sin\varphi\cos\psi\vec{j}+\sin\psi\vec{k},$$

$$\vec{e}_\varphi=\frac{\dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial\varphi}}{\left|\dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial\varphi}\right|}=-\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j},$$

$$\vec{e}_\psi=\frac{\dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial\psi}}{\left|\dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial\psi}\right|}=-\cos\varphi\sin\psi\vec{i}-\sin\varphi\sin\psi\vec{j}+\cos\psi\vec{k}.$$

并且可算得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\varphi\cos\psi,\frac{\partial r}{\partial y}=\sin\varphi\cos\psi,\frac{\partial r}{\partial z}=\sin\psi.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{r\cos\psi},\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\cos\varphi}{r\cos\psi},\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0.$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\varphi\sin\psi}{r},\frac{\partial\psi}{\partial y}=-\frac{\sin\varphi\sin\psi}{r},\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{\cos\psi}{r}.$$

所以,有 $\nabla=\vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

$$\begin{aligned}
&=\vec{i}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\\
&\quad+\vec{j}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\\
&\quad+\vec{k}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\\
&=\vec{i}\left(\cos\varphi\cos\psi\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{\cos\varphi\sin\psi}{r}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\\
&\quad+\vec{j}\left(\sin\varphi\cos\psi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{\sin\varphi\sin\psi}{r}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\\
&\quad+\vec{k}\left(\sin\psi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\psi}{r}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\\
&=\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r\cos\varphi}\vec{e}_\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}+\vec{e}_\psi\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\psi}.
\end{aligned}$$

设 $\vec{a}=a_r\vec{e}_r+a_\varphi\vec{e}_\varphi+a_\psi\vec{e}_\psi$.

注意到 $\vec{e}_r,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_\psi$ 是 r,φ,ψ 的函数,并且

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}=\cos\psi\vec{e}_\varphi,\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-\cos\varphi\vec{i}-\sin\varphi\vec{j},$$

$$\frac{\partial\vec{e}_\psi}{\partial\varphi}=-\sin\psi\vec{e}_\varphi,\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\psi}=\vec{e}_\psi,\frac{\partial\vec{e}_\psi}{\partial\psi}=-\vec{e}_r,$$

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial r}=\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial r}=\frac{\partial\vec{e}_\psi}{\partial r}=\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\psi}=0,$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\vec{a}&=\nabla\times\vec{a}\\&=\vec{e}_r\times\frac{\partial}{\partial r}(a_r\vec{e}_r+a_\varphi\vec{e}_\varphi+a_\psi\vec{e}_\psi)\\&\quad+\frac{1}{r\cos\varphi}\vec{e}_\varphi\times\frac{\partial}{\partial\varphi}(a_r\vec{e}_r+a_\varphi\vec{e}_\varphi+a_\psi\vec{e}_\psi)\\&\quad+\frac{1}{r}\vec{e}_\psi\times\frac{\partial}{\partial\psi}(a_r\vec{e}_r+a_\varphi\vec{e}_\varphi+a_\psi\vec{e}_\psi)\\&=\left[\frac{1}{r\cos\varphi}\left(-\frac{\partial(a_\psi\cos\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\psi}\right)\right]\vec{e}_r\\&\quad+\left[\frac{1}{r\cos\varphi}\cdot\frac{\partial a_r}{\partial\psi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\psi)}{\partial r}\right]\vec{e}_\varphi\\&\quad+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_\psi.\end{aligned}$$

【4441】 求向量 r 的流量:(1) 通过锥体侧面 $x^2+y^2\leqslant z^2(0\leqslant z\leqslant h)$;(2) 通过这个锥体的底.

解 (1) 在侧面 S_1,点的向径的方向与母锥的母线重合,因此,点的向径与圆锥在该点的法线互相垂直.即

$$(\vec{r})_n=\vec{r}\cdot\vec{n}=0,$$

所以,向量 $\vec{r}$ 穿过侧面 S_1 的流量为

$$\iint_{S_1}\vec{r}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=0.$$

(2) 在圆锥的底面 S_2 上有 $\vec{r}\cdot\vec{n}=h$,

所以,所求流量为

$$\iint_{S_2}\vec{r}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leqslant h^2}h\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi h^3.$$

【4442】 求向量$\vec{a}=\vec{i}yz+\vec{j}xz+\vec{k}xy$ 的流量:(1) 通过柱体侧面 $x^2+y^2\leqslant a^2(0\leqslant z\leqslant h)$;(2) 通过这个柱体的总表面.

解 先求(2) 通过圆柱全表面流量为

$$\iint_S\vec{a}\cdot\vec{n}dS=\iiint_v\mathrm{div}\vec{a}\mathrm{d}v=\iiint_v 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

再求(1) 设 S_1 表示圆柱的侧面,S_2,S_3 表示圆柱的上,下底面. 而

$$\iint_{S_2}\vec{a}\cdot\vec{n}dS=\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S_3}\vec{a}\cdot\vec{n}dS,$$

故
$$\iint_{S_2+S_3}\vec{a}\cdot\vec{n}dS=2\iint_{x^2+y^2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\int_0^{2\pi}\int_0^a r^3\sin\varphi\cos\varphi drd\varphi=0,$$

因此
$$\iint_{S_1}\vec{a}\cdot\vec{n}dS=0.$$

即通过侧面的流量也为 0.

【4443】 求向径$\vec{r}$通过曲面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的流量.

解 设 S_1 为所给的曲面,S_2 为锥的底面即 xOy 平面上的圆域 $x^2+y^2\leqslant 1$. 则 $S=S_1+S_2$ 构成一封闭曲面

$$\iint_S\vec{r}\cdot\vec{n}dS=\iiint_v\mathrm{div}\vec{r}\mathrm{d}v=3\iiint_v\mathrm{d}v=3\cdot\frac{1}{3}\pi=\pi,$$

而在 S_2 上 $\vec{r}\perp\vec{n}$. 故

$$\iint_{S_2}\vec{r}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=0,$$

从而,所求流量为

$$Q=\iint_{S_1}\vec{r}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iint_S\vec{r}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S-\iint_{S_2}\vec{r}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\pi.$$

【4444】 求向量$\vec{a}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ 通过球面 $x^2+y^2+z^2$

$=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的正八分之一的流量.

解 由对称性可得流量为

$$Q=\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(1-r^2)\cdot r\mathrm{d}r=\frac{3\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{3\pi}{8}.$$

【4445】 求向量 $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ 通过由平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=a(a>0)$ 围成的角锥总表面的流量. 运用奥斯特罗格拉茨基公式检验结果.

解 设由平面 $x=0, y=0, z=0$,

$x+y+z=a$ 所围成的四面体的表面为 S, 并取 S 的外侧为正侧. 又设四面体的各表面依次为 S_1, S_2, S_3, S_4 则流量为

$$Q=\oint\!\!\!\oint_S y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}z+x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由对称性知

$$Q=3\oint\!\!\!\oint_S x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\left[\iint_{S_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_2}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_3}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_4}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right],$$

由于 S_1, S_2 在 xOy 平面的投影域为一线段, 故

$$\iint_{S_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{S_2}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

又 $$\iint_{S_3}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ x+y\leqslant a}}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \iint_{S_4}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ x+y\leqslant a}}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

将所得结果代入(1) 得 $Q=0$.

下面用奥氏公式来验证结果

$$Q=\oint\!\!\!\oint_S y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}z+x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

【4445.1】 求向量 $a=x^2i+y^2j+z^2k$ 通过球面 $x^2+y^2+z^2=x$ 的流量.

解 利用奥氏公式,可得所求流量为

$$Q=\iint\limits_S\vec{a}\cdot\vec{n}dS=\iiint\limits_v\mathrm{div}\vec{a}\mathrm{d}v$$

$$=2\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant x}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

作变量代换

$$x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi\cos\psi,y=r\sin\varphi\cos\psi,z=r\sin\psi,$$

则
$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=r^2\cos\psi,$$

所以流量

$$Q=2\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+r\cos\varphi\cos\psi\right.$$

$$\left.+r\sin\varphi\cos\psi+r\sin\psi\right)\cdot r^2\cos\psi\mathrm{d}\varphi$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+r\sin\psi\right)r^2\cos\psi\mathrm{d}\varphi$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{1}{2}}r^2\mathrm{d}r=4\pi\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}.$$

【4446】 证明:向量$\vec{a}$ 通过由方程$\vec{r}=\vec{r}(u,v)((u,v)\in\Omega)$,给出的曲面 S 的流量等于:

$$\iint\limits_S a_n\mathrm{d}S=\iint\limits_S\left(\vec{a}\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

其中 $a_n=\vec{a}\cdot\vec{n}$,n 为曲面 S 法线的单位向量.

证 设曲面 S 的方程为

$$\vec{r}=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k},$$

则有
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\vec{k},$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\vec{k},$$

从而
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}$$
$$=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\vec{j}$$
$$+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\vec{k}.$$

因此,易得
$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|=\sqrt{EG-F^2},$$

其中
$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$
$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$
$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

又$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$的方向显然是法线$\vec{n}$的方向. 所以我们有

$$\iint\limits_{S}\vec{a}\cdot\vec{n}dS=\iint\limits_{\Omega}\vec{a}\cdot\vec{n}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\iint\limits_{\Omega}\vec{a}\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\iint\limits_{\Omega}\left(\vec{a}\quad\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\quad\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

【4447】 求向量$\vec{a}=\frac{m\,\vec{r}}{r^3}$($m$为常数)通过包围坐标原点的封闭曲面$S$的流量.

解 流量

$$Q=\iint\limits_{S}\vec{a}\cdot\vec{n}dS=m\iint\limits_{S}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3}dS=m\iint\limits_{S}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS,$$

由 4392 题知

$$\iint\limits_{S}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS=4\pi,$$

故 $Q=4\pi m$.

【4448】 求向量 $\vec{a}(r)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right)$(其中 e_i 为常数和 r_i 为点 M_i(起源点)到动点 $M(\vec{r})$ 的距离)通过包围 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的封闭曲面 S 的流量.

解 首先,我们有

$$\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i\vec{r}_i}{4\pi r_i^3},$$

设 S 为包围点 $M_i(i=1,\cdots n)$ 的闭曲面. 并取外侧为正侧,以 M_i 为中心,充分小的正数 ε 为半径作球面 $S_i(i=1,\cdots n)$ 使这些球面全在 S 内且互不相交,并取内侧为正侧,由 S 及 $S_i(i=1,\cdots n)$ 所围的立体记为 V,则在 V 中,$\frac{1}{r_i}$ 为调和函数. 故

$$\mathrm{divgrad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right)=\Delta\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right)=0,$$

故由奥氏公式得

$$\iint\limits_{S+S_1+\cdots S_n}\vec{a}\cdot\vec{n}dS=\iiint\limits_{v}\mathrm{div}\vec{a}dv=0,$$

而由 4392 题知

$$-\iint\limits_{S_k}\frac{1}{r_i^3}(\vec{r}_i\cdot\vec{n})dS=-\iint\limits_{S_k}\frac{\cos(\vec{r}_i,\vec{n})}{r_i^2}dS$$

$$=\begin{cases}0 & \text{当 } k\neq i \text{ 时}\\ 4\pi & \text{当 } k=i \text{ 时},\end{cases}$$

因此,向量 $\vec{a}$ 穿过曲面 S 的流量为

$$Q=\iint\limits_{S}\vec{a}\cdot\vec{n}dS=-\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{S_k}\vec{a}\cdot\vec{n}dS=\sum_{k=1}^{n}e_k.$$

【4449】 证明：$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \nabla^2 u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中曲面 S 限制体积 V.

证 由 4393 题(1) 得

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,

另一方面 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$,

所以 $\quad \nabla^2 u = \Delta u$,

故 $\quad \iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \nabla^2 u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

【4450】 在单位时间内通过曲面元素 $\mathrm{d}S$ 流入温度场 u 的热量等于 $\mathrm{d}Q=-k\vec{n}\cdot\mathrm{grad}u\mathrm{d}S$，其中 k 为内部传热系数，$\vec{n}$ 为曲面 S 法线的单位向量. 确定单位时间内物体 V 所积累的热量. 利用温度提高速度，推导物体温度满足的方程式(传热方程式).

解 由于

$$\mathrm{d}Q=-k\vec{n}\cdot\mathrm{grad}u\mathrm{d}S,$$

故在单位时间内，流出曲面 S 的热量为

$$Q=-\iint\limits_S k\vec{n}\,\mathrm{grad}u\mathrm{d}S=-\iiint\limits_V k\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

因此，单位时间内流入物体 V 的热量为

$$-Q=\iiint\limits_V \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \qquad ①$$

再用另一种方法来计算物体 V 所吸收的热量在 $\mathrm{d}t$ 时间内，温度的增加为 $\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t$ 由热力学下律知，体积元素 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 增力的热量为 $\quad c\mathrm{d}u\rho\mathrm{d}v = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$,

其中 c 为物体的热容量(比热)，ρ 为其密度. 因此，在单位时间内物

体所吸改的热量为

$$-Q=\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{②}$$

比较 ①,② 两式得

$$\iiint\limits_V\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\mathrm{div}(k\mathrm{grad}u)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

这个等式对所论区域的任何子区域内 V' 都成立,且被积函数为连续函数,故必有

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\mathrm{div}(k\mathrm{grad}u),$$

这就是热传导方程.

【4451】 处于运动中的不可压缩液体充满区域 V. 假定:在域 V 内没有来源点和出流点,推导连续方程式:

$$\frac{\alpha p}{\alpha t}+\mathrm{div}(\overrightarrow{\rho v})=0,$$

其中 $\rho=\rho(x,y,z)$ 为液体密度,v 为流速向量,t 为时间.

提示:研究经过在 V 域中含有任意容积 ω 的液体流.

证 设 $\sum$ 是区域 V 内的任意闭曲面,它包围着区域 W,取 $\sum$ 的外侧为正侧.

在单位时间内,液体流出 $\sum$ 的流量为

$$Q=\iint\limits_S\rho\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S.$$

因而流进曲面 $\sum$ 的流量为

$$-Q=-\iint\limits_{\Sigma}\rho\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S.$$

应用奥氏公式可得

$$-Q=-\iiint\limits_W\mathrm{div}(\rho\vec{v})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{①}$$

再用另一种方法来计算流进曲面 $\sum$ 的流量.

在 dt 时间内,密度 ρ 的增加为 $\mathrm{d}\rho=\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}t$,

故体积元素 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的质量增加为 $\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$,

因此,在单位时间内流进区域 W 的流量为

$$-Q=\iiint\limits_{W}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \qquad ②$$

比较 ①,② 两式,可得

$$\iiint\limits_{W}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{v})\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

这个等式对于区域 V 内的任何于区域 W 都成立,且被积函数连续. 故当 $(x,y,z)\in V$ 时

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{v})=0.$$

【4452】 求向量 $\vec{a}=\vec{r}$ 沿着螺线 $\vec{r}=\vec{i}a\cos t+\vec{j}a\sin t+\vec{k}bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 段所做的功.

解 所求功为

$$\begin{aligned}w&=\int_{c}a_x\mathrm{d}x+a_y\mathrm{d}y+a_z\mathrm{d}z\\&=\int_{0}^{2\pi}[a\cos t((-a\sin t)+a\sin t(a\cos t)+bt\cdot b]\mathrm{d}t\\&=\int_{0}^{2\pi}b^2t\mathrm{d}t=2\pi^2b^2.\end{aligned}$$

【4452.1】 求场 $\vec{a}=\frac{1}{y}\vec{i}+\frac{1}{z}\vec{j}+\frac{1}{x}\vec{k}$ 沿着连结点 $M(1,1,1)$ 与 $N(2,4,8)$ 的直线段所做的功.

解 MN 的方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{7}=t \qquad (0\leqslant t\leqslant 1),$$

即 $\qquad x=t+1,y=3t+1,z=7t+1 \qquad (0\leqslant t\leqslant 1),$

所求的功为

$$W=\int_{MN}\frac{1}{y}\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\mathrm{d}y+\frac{1}{x}\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3t+1}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{3}{7t+1}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{7}{t+1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3}\ln(3t+1)\Big|_0^1 + \frac{3}{7}\ln(7t+1)\Big|_0^1 + 7\ln(t+1)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ln 4 + \frac{3}{7}\ln 8 + 7\ln 2 = \frac{188}{21}\ln 2.$$

【4452.2】 求场 $\vec{a} = \vec{i}e^{y-z} + \vec{j}e^{z-x} + \vec{k}e^{x-y}$ 沿着 $O(0,0,0)$ 与 $M(1,3,5)$ 之间的直线段所做的功.

解 OM 的方程为

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

即 $x = t, y = 3t, z = 5t$.

所求功为

$$W = \int_{OM} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{OM} e^{y-z}\mathrm{d}x + e^{z-x}\mathrm{d}y + e^{x-y}\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 (e^{-2t} + 3e^{4t} + 5e^{-2t})\mathrm{d}t$$

$$= \left(-3e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{4t}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4}e^4 - 3e^{-2} + \frac{9}{4}.$$

【4452.3】 求场 $\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (2+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 上沿着连结点 $M(3,4,0)$ 和 $N(0,0,5)$ 点的极短大圆弧所做的功.

解 曲线$\overset{\frown}{MN}$ 的参数方程为

$$x = 3\cos\psi, y = 4\cos\psi, z = 5\sin\psi \qquad \left(0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

所求的功为

$$W = \int_{\overset{\frown}{MN}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{\overset{\frown}{MN}} (y+z)\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-(4\cos\psi + 5\sin\psi)3\sin\psi$$

$$-(2+3\cos\psi)4\sin\psi + 7\cos\psi \cdot 5\cos\psi]\mathrm{d}\psi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-24\sin\psi\cos\psi - 8\sin\psi - 15\sin^2\psi + 35\cos^2\psi)\,d\psi$$

$$= (-12\sin^2\psi + 8\cos\psi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-15\,\frac{1-\cos 2\psi}{2} + 35\,\frac{1-\cos 2\psi}{2}\right] d\psi$$

$$= -20 + 10 \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi - 20.$$

【4453】 求向量 $\vec{a} = f(r)\vec{r}$(其中 f 为连续函数)沿着 AB 弧所做的功.

解 由

$$\vec{a} = f(r)\vec{r} = f(r)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}),$$

所以,所求功为

$$w = \int_{\widehat{AB}} f(r)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z).$$

由于 $f(r)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z)$ 是一个全微分,

因此线积分与路径无关,故

$$W = \int_{\widehat{AB}} f(r)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z) = \int_{r_A}^{r_B} f(r) r\mathrm{d}r.$$

【4454】 求向量 $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + c\vec{k}$($c$ 为常数)的环流:(1) 沿着圆周 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$,(2) 沿着圆周 $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$.

解 (1) 圆 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ 的向径 $\vec{r}$ 适合方程

$$\vec{r} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi),$$

故

$$\vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= (-\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + c\vec{k}) \cdot (-\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + o\vec{k})\,\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{d}t,$$

故所求环流为

$$\Gamma = \oint_c \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi.$$

(2) 对于圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$ 有

$$\vec{r} = (2 + \cos t)\vec{i} + \sin t\vec{j} + 0\vec{k} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

则 $$\vec{a}\cdot d\vec{r}=[(-\sin t\vec{i}+(2+\cos t)\vec{j}+c\vec{k})\cdot(-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+o\vec{k})]dt=(2\cos t+1)dt.$$

故所求环流为

$$\Gamma=\oint\vec{a}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}(2\cos t+1)dt=2\pi.$$

【4455】 求向量$\vec{a}=\text{grad}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$沿着周线$C$在两种情况下的环流$\Gamma$：(1) C不围绕Oz轴转；(2) C围绕Oz轴转.

解 $$\vec{a}=\text{grad}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)\vec{j},$$

故 $$\Gamma=\oint_c\vec{a}\cdot d\vec{r}=\oint_c\frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x}dx+\frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{y}{x}dy=\oint_c d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\Delta\Phi|_c,$$

其中$\Delta\Phi|_c$是当用柱坐标

$$x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi,z=z,$$

表示点$M(x,y,z)$时，点M在C上运动一周时φ的改变量.

(1) 当曲线C不围绕Oz轴时，则点M在C上运动一周时，φ的值不改变，故得$\Gamma=0$.

(2) 当曲线C按右手系围绕Oz轴n圈时，则当点M在C上运动一周时φ的值增加了$2n\pi$故得$\Gamma=2n\pi$.

【4455.1】 给出向量场：

$$\vec{a}=\frac{y}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{x}{\sqrt{2}}\vec{j}+\sqrt{xy}\vec{k},$$

计算在点$M(1,1,1)$的$\text{rot}\,\vec{a}$，近似地求场沿着无限小圆周Γ：

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\varepsilon^2,\\(x-1)\cos\alpha+(y-1)\cos\beta+(z-1)\cos\gamma=0.\end{cases}$$

的环流. 其中$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

解 因为

$$\vec{a}=\frac{y}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{x}{\sqrt{2}}\vec{j}+\sqrt{xy}\vec{k},$$

所以
$$\mathrm{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{y}{\sqrt{2}} & -\frac{x}{\sqrt{2}} & \sqrt{xy}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\vec{i}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\vec{j}-\sqrt{2}\vec{k}.$$

故
$$\mathrm{rot}\vec{a}(M)=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}-\sqrt{2}\vec{k}.$$

沿小圆周 C 的环流

$$\Gamma=\oint_C\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\iint_S\mathrm{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S,$$

其中 S 是由 C 张成的在平面

$$(x-1)\cos\alpha+(y-1)\cos\beta+(z-1)\cos\gamma=0,$$

上的小圆域,用 $\mathrm{rot}\vec{a}(M)$ 近似地代替 $\mathrm{rot}\vec{a}$ 则得

$$\Gamma\approx\iint_S\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos\beta-\sqrt{2}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos\beta-\sqrt{2}\cos\gamma\right)\pi\varepsilon^2.$$

【4456】 平面不可压缩的液体稳定流由下面的速度向量确定:

$$\vec{\omega}=u(x,y)\vec{i}+v(x,y)\vec{j}.$$

求:(1) 经过包围域 S 的封闭周线 C 的液体流量 Q;(2) 速度向量沿着周线 C 的环流 Γ. 若流场是无源泉、无漏孔和无旋的,则函数 u 和 v 满足什么样的方程式?

解 (1) 设流体的密度为 $\rho(x,y)$,则流出液体的量为

$$Q=\oint_C\rho\vec{\omega}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S,$$

其中 $\vec{n}$ 为闭曲线上的外法线方向的单位向量. 设 $\vec{t}$ 为曲线上的点的切线方向的单位向量且令 $\vec{t}=\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}$,则

$$(\vec{t},\vec{x})=\alpha=\frac{\pi}{2}+(\vec{n},\vec{x})=\pi+(\vec{n},\vec{y}),$$

$$(\vec{t},\vec{y})=(\vec{n},\vec{x})=\alpha-\frac{\pi}{2},$$

故得 $\quad \vec{n}=\cos(\vec{n},\vec{x})\vec{i}+\cos(\vec{n},\vec{y},)\vec{j}=\sin\alpha\vec{i}-\cos\alpha\vec{j}$,

由此得流量

$$Q=\oint_C\rho(u\vec{i}+v\vec{j})(\sin\alpha\vec{i}-\cos\alpha\vec{j})\mathrm{d}s$$

$$=\oint_C\rho(u\sin\alpha-v\cos\alpha)\mathrm{d}s=\oint_C-\rho v\mathrm{d}x+\rho u\mathrm{d}y.$$

应用格林公式得

$$Q=\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) $\Gamma=\oint_C\rho\vec{w}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\oint\rho(u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}t)$

$$=\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

若液体是不可压缩的,则 $\rho=$ 常数,所以

$$Q=\rho\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\Gamma=\rho\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

若流场无源泉无漏孔及无旋度,则对于流场中任何围绕 C 及其所包围的域 S 均有

$$Q=0 \text{ 及 } \Gamma=0.$$

于是,在流场中的每一点,均有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \text{ 及} \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

【4457】 证明:场

$$\vec{a} = yz(2x+y+z)\vec{i} + xz(x+2y+z)\vec{j} + xy(x+y+2z)\vec{k},$$

是有势场,求这个场的势.

证 因为

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ yz(2x+y+z) & xz(x+2y+z) & xy(x+y+2z) \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

故 $\vec{a}$ 为有势场.它的势函数是

$$u(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + C$$
$$= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} yz(2x+y+z)\mathrm{d}x + xz(x+2y+z)\mathrm{d}y + xy(x+y+2z)\mathrm{d}z + C,$$

取积分路径为折线段 $OABP$ 其中 O,A,B,P 的坐标依次为 $(0,0,0),(x,0,0),(x,y,0),(x,y,z)$,则

$$u = \int_0^x 0\mathrm{d}x + \int_0^y 0\mathrm{d}y + \int_0^z xy(x+y+2z)\mathrm{d}z + C$$
$$= x^2yz + xy^2z + xyz^2 + C$$
$$= xyz(x+y+z) + C$$

其中 C 为任意常数.

【4457.1】 确认场的势:

$$\vec{a} = \frac{2}{(y+z)^{\frac{1}{2}}}\vec{i} - \frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}}\vec{j} - \frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}}\vec{k},$$

并求场沿着连结点 $M(1,1,3)$ 和点 $N(2,4,5)$ 的正八分之一路线所作的功.

解 当 $y+z\neq 0$ 时,

$$\mathrm{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{2}{(y+z)^{\frac{1}{2}}} & -\dfrac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}} & -\dfrac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}}\end{vmatrix}=0,$$

故 $\vec{a}$ 为有势场. $\vec{a}$ 的势函数为

$$u(x,y,z)=\frac{2x}{(y+z)^{\frac{1}{2}}}.$$

事实上容易验证 $\mathrm{grad}u=\vec{a}$.

故所求功为

$$w=\int_{MN}\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=u(N)-u(M)=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}.$$

【4458】 求位于坐标原点的质量 m 所形成的引力力场 $\vec{a}=-\frac{m}{r^2}\vec{r}$.

解 $\mathrm{d}u=\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\dfrac{m}{r^3}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$

$$=-\frac{m}{2r^3}\mathrm{d}r^2=-\frac{m}{r^2}\mathrm{d}r=\mathrm{d}\left(\frac{m}{r}\right),$$

故势 $\quad u=\dfrac{m}{r}+C,$

其中 C 为任意常数.

【4459】 求位于点 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的质量系 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$ 所形成的引力场的势.

解 由位置在 M_i 的质点系 $m_i(i=1,\cdots n)$ 所产生的引力场为

$$\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i=\sum_{i=1}^{n}-\frac{m_i}{r_i^3}\vec{r}_i,$$

其中 $\quad\vec{r}_i=(x-x_i)\vec{i}+(y-y_i)\vec{j}+(z-z_i)\vec{k},$

$$r_i=|\vec{r}_i|.$$

由 4458 知

$$\operatorname{grad}\frac{m_i}{r_i}=-\frac{m_i}{r_i^3}\vec{r}_i \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

故得 $$\operatorname{grad}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{grad}\frac{m_i}{r_i}=\vec{a}.$$

即引力场 $\vec{a}$ 的势为

$$u(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}.$$

【4460】 证明:场$\vec{a}=f(r)\vec{r}$(其中 $f(r)$ 为单值连续函数)是有势场.求这个场的势.

证 $\vec{a}=f(r)\vec{r}=f(r)(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$,

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ xf(r) & yf(r) & zf(r)\end{vmatrix}$$

$$=\left[z\cdot f'(r)\cdot\frac{y}{r}-yf'(r)\cdot\frac{z}{r}\right]\vec{i}$$

$$+\left[f'(r)\cdot\frac{z}{r}-zf'(r)\cdot\frac{x}{r}\right]\vec{j}$$

$$+\left[yf'(r)\cdot\frac{x}{r}-xf'(r)\cdot\frac{y}{r}\right]\vec{k}=\vec{0}.$$

故 $\vec{a}$ 为有势场,势函数为

$$u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\vec{a}\cdot d\vec{r}+C$$

$$=\int_{r_0}^{r}f(r)\vec{r}\cdot d\vec{r}+C$$

$$=\int_{r_0}^{r}tf(t)dt,$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.